1 Wahrscheinlichkeitsräume

→ mathematische Beschreibung als Tripel $(\Omega, \mathbb{F}, P)$

- Ω: Ergebnisraum, Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments
- $\mathbb{F}$: Ereignisalgebra, die die Anforderungen einer Algebra erfüllt:

$$\begin{aligned} \Omega &\in \mathbb{F} \\ A \in \mathbb{F} &\Rightarrow A^c \in \mathbb{F} \\ A_1, A_2, ..., A_k \in \mathbb{F} &\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{k} A_i \in \mathbb{F} \end{aligned}$$

  Ist also ein Erzeugendensystem $\mathbb{G}$ gegeben und soll überprüft werden, ob dieses Erzeugendensystem bereits eine Ereignisalgebra darstellt, so müssen obige drei Bedingungen erfüllt sein: Ω und $\varnothing$ müssen entsprechend stets in $\mathbb{F}$ enthalten sein, die anderen Elemente finden sich durch Komplement- und Vereinigungsbildung.

- P: Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\begin{aligned} P(A) &\geq 0 \\ P(\Omega) &= 1 \\ P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \text{ wenn} A_i \cap A_j = \varnothing, \forall i \neq j \end{aligned}$$

  Hieraus ergeben sich die folgenden, mitunter äußerst nützlichen Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} P(A^c) &= 1 - P(A) & P(\varnothing) &= 0 \\ P(A \setminus B) &= P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) & P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ A \subset B &\Rightarrow P(A) \leq P(B) & P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_k\right) &\leq \sum_{i=1}^{k} P(A_i) \end{aligned}$$

2 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

→ Definition: $P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $P(B) \neq 0$

→ Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit $(\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega, B_i \cap B_j = \varnothing, \forall i \neq j)$:

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

→ Satz von Bayes

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i \in I} P(A|B_i)P(B_i)}$$

→ Mit Hilfe des Gesetzes der totalen Wahrscheinlichkeit und dem Satz von Bayes ist es möglich, die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, falls untersuchtes Ereignis und Bedingung ihre Rolle tauschen.

→ Stochastische Unabhängigkeit: Ereignisse A, B unabhängig, falls $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ bzw. $P(A|B) = P(A)$

3 Zufallsvariablen

→ Definition: $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega', \mathbb{F}')$ Messraum, eine Funktion X, die Ereignisse ω_i von Ω nach Ω' abbildet, heißt Zufallsvariable;

→ Kumulative Wahrscheinlichkleitsverteilung (KVF, CDF):

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x)$$

- $F_X(x)$ monoton wachsend, d.h. $\frac{dF_X(x)}{dx} \geq 0$
- $F_X(x)$ ist rechtsseitig stetig, d.h. $\forall h > 0 : \lim_{h \to 0} F_X(x+h) = F_X(x), \forall x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \lim_{x \to \infty} F_{\mathsf{X}}(x) = 1$

Umkehrung dieses Satzes ist möglich, d.h. zu jeder Funktion F, die obige Eigenschaften erfüllt, existiert eine Zufallsvariable X.

→ Unterscheidung zwischen **stetigen** (Bildraum $\mathbb{R}$) und **diskreten** (Bildraum endlich) Zufallsvariablen

- im Falle einer reellen diskreten Zufallsvariable lässt sich $F_X(x)$ mittles der **Zähldichte** (probability mass function, PMF)

$$p_X(x) = P(\{X = x\})$$

wie folgt darstellen

$$F_X(x) = \sum_{\xi \in \Omega'; \xi \leq x} p_X(\xi)$$

- im Falle einer reellen stetigen Zufallsvariable lässt sich $F_X(x)$ mittels der **Wahrscheinlichtsdichtefunktion** (probability density function, PDF) wie folgt darstellen

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\xi) \mathrm{d}\xi \qquad \Leftrightarrow \qquad f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

→ **Mehrdimensionale Verteilungen**: Geg. sei $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$ n-dimensionale Zustandsvariable, für die kumulative Verteilungsfunktion von $\mathbf{X}$ folgt:

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(\{\mathbf{X} \leq \mathbf{x}\}) = P(\{X_1 \leq x_1\} \cap \ldots \cap \{X_n \leq x_n\})$$

analog zum eindimensionalen Fall folgt:

$$p_{X_1,\ldots,X_n} = p(\{\mathbf{X} = \mathbf{x}\})$$
$$F_{X_1,\ldots,X_n} = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1,\ldots,X_n}(\xi_1, \ldots, \xi_n) \mathrm{d}\xi_1 \ldots \mathrm{d}\xi_n$$

→ **Marginalisierung**: Durch Integration/Summation über die nicht mehr berücksichtigten Zufallsvariablen erhält man aus der Verbundwahrscheinlichtsdichte/Verbund-Zähldichte die Randdichte/Rand-Zähldichte einer oder mehrerer Zufallsvariablen

$$p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2,\ldots,x_n} p_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)$$
$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n$$

→ **Unabhängigkeit von Zufallsvariablen**: Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, falls

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$
$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$$
$$p_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{X_i}(x_i)$$

→ **Bedingte Zufallsvariablen**: Definition entsprechend dem Vorgehen bei Ereignissen

$$F_{X|A}(x|A) = P_A(\{X \leq x\}) = P(\{X \leq x\}|A)$$
$$F_{X|Y}(x|y) = P_Y(\{X \leq x\}) = \frac{P(\{X \leq x\} \cap \{Y = y\}}{P(\{Y = y\}))}$$

nur definiert, falls $P(\{Y = y\}) \neq 0$

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$$
$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{dF_{X|Y}(x|y)}{dx} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

→ **Funktionen von Zufallsvariablen**

- lineare Funktion $Y = g(X) = aX + b$

$$F_{\mathsf{Y}}(y) = P(\{\mathsf{Y} \leq y\}) = P(\{a\mathsf{X} + b \leq \mathsf{Y}\}) = \begin{cases} F_{\mathsf{X}}(\frac{y-b}{a}), & a > 0 \\ 1 - F_{\mathsf{X}}(\frac{y-b}{a}), & a < 0 \end{cases}$$
$$f_{\mathsf{Y}}(y) = \frac{1}{|a|} f_{\mathsf{X}}\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

  ⇒ affine Abbildungen verändern den generellen Typ der Verteilung nicht

- allgemeiner Fall $\mathsf{Y} = g(\mathsf{X})$

$$f_{\mathsf{Y}}(y) = \sum_{i=1}^{K} f_{\mathsf{X}}(x_i) \left(\left| \frac{dg(x_i)}{dx} \right| \right)^{-1}, \qquad y - g(x_i) = 0, \qquad i \in 1, \ldots, K$$

4 Stochastische Standardmodelle

→ **Verteilungen diskreter Zufallsvariablen**

- diskrete Gleichverteilung:
  $p_X(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$
- Bernoulli-Verteilung: zwei Ereignisse (Erfolg $X = 1$, Misserfolg $X = 0$) von Interesse
  * Parameter: $p : 0 \leq p \leq 1$
  * Zähldichte: $p_X(k) = \begin{cases} p, & k = 1 \\ (1-p), & k = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

    * Erwartungswert $\mathsf{E}[X] = p$
    * Varianz: $\mathsf{Var}[X] = p(1-p)$
    * Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion: $G_X(z) = pz + 1 - p$
  - Binomialverteilung: stochastisch unabhängige Hintereinanderausführung mehrerer Bernoulli-Experimente
    * Parameter: $p : 0 \leq p \leq 1, n : n \in \mathbb{N}$
    * Zähldichte: $p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)}$
    * Erwartungswert: $\mathsf{E}[X] = np$
    * Varianz: $\mathsf{Var}[X] = np(1-p)$
    * Wahrscheinlichtskeitserzeugende Funktion: $G_X(z) = (pz + 1 - p)^n$
  - Poissonverteilung: geht aus der Binomialverteilung durch Bildung des Grenzwertes $\lim_{n\to\infty} B_n(p,k)$ hervor
    * Parameter: $\lambda : \lambda = np = const.$
    * Zähldichte: $p_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
    * Erwartungswert: $\mathsf{E}[X] = \lambda$
    * Varianz: $\mathsf{Var}[X] = \lambda$
    * Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion: $G_X(z) = e^{\lambda(z-1)}$
  - Geometrische Verteilung: Modellierung von Warteschlangen-Problemen (typische Fragestellung: „Wann tritt Ereignis X zum ersten Mal auf?“); zusammen mit der Exponentialverteilung einzige *gedächtnislose* Verteilung ($P(\{\mathsf{X} > n+k\} | \mathsf{X} > n) = P(\{\mathsf{X} > k\})$)
    * Parameter: $p : 0 \leq p \leq 1$
    * Zähldichte: $p_X(k) = p(1-p)^{k-1}$
    * Erwartungswert: $\mathsf{E}[X] = \frac{1}{p}$
    * Varianz: $\mathsf{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2}$
    * Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion: $G_X(z) = \frac{pz}{1-z+pz}$

→ **stetige Verteilungsfunktionen**
  - stetige Gleichverteilung:
    * Parameter: $a, b : -\infty < a, b, < \infty$
    * Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:
      $$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
    * Erwartungswert: $\mathsf{E}[X] = \frac{a+b}{2}$

    * Varianz: $\mathsf{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$
    * Charakteristische Funktion: $\varphi_X(\omega) = \frac{e^{j\omega b} - e^{j\omega a}}{j\omega(b-a)}$
  - Exponentialverteilung:
    * Parameter: $\lambda : \lambda > 0$
    * Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
    * Erwartungswert: $\mathsf{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$
    * Varianz: $\mathsf{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$
    * Charakteristische Funktion: $\varphi_X(\omega) = \frac{\lambda}{\lambda - j\omega}$
  - Normalverteilung
    * Parameter: $\mu : \mu \in \mathbb{R}, \sigma : \sigma > 0$
    * Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
    * Erwartungswert: $\mathsf{E}[X] = \mu$
    * Varianz: $\mathsf{Var}[X] = \sigma^2$
    * Charakteristische Funktion: $\varphi_X(\omega) = e^{j\omega\mu - \frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$

5 Erwartungswert und Varianz

→ **Erwartungswert diskreter Zufallsvariablen**

$$\mathsf{E}[X] = \sum_{x \in \Omega'} x P(\{X = x\}) = \sum_{x \in \Omega'} x p_X(x)$$

Entsprechend folgt für Funktionen von Zufallsvariablen $Y = g(X)$:

$$\mathsf{E}[Y] = \mathsf{E}[g(X)] = \sum_{x \in \Omega'} g(x) p_X(x)$$

→ **Erwartungswert, Varianz (mittlere quadratische Abweichung) und Kovarianz stetiger Zufallsgrößen**

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x \\
\mathsf{Var}[X] &= \mathsf{E}\left[(X - \mathsf{E}[X])^2\right] = \mathsf{E}\left[X^2\right] - \mathsf{E}[X]^2 \\
\mathsf{Cov}[X,Y] &= \mathsf{E}[(X - \mathsf{E}[X])(Y - \mathsf{E}[Y])] = \mathsf{E}[XY] - \mathsf{E}[X]\,\mathsf{E}[Y] = \mathsf{Cov}[Y,X] \\
\mathsf{Cov}[X,X] &= \mathsf{Var}[X]
\end{aligned}$$

Entsprechend folgt für Funktionen von Zufallsvariablen $Y = g(X)$:

$$\mathsf{E}[Y] = \mathsf{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) \mathrm{d}x$$

→ **Eigenschaften von Erwartungswert, Varianz und Kovarianz**

– Linearität des Erwartungswerts:

$$\mathsf{E}[aX + bY] = a\mathsf{E}[X] + b\mathsf{E}[Y]$$

– Ordnungserhaltung

$$X \leq Y \Rightarrow \mathsf{E}[X] \leq \mathsf{E}[Y]$$

Sind X und Y stochastisch unabhängig, gilt ferner:

$$\mathsf{E}[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\mathrm{d}y = \mathsf{E}[X] \cdot \mathsf{E}[Y]$$

– Eigenschaften der Varianz und Kovarianz

$$\begin{aligned}
\mathsf{Var}[X] &= \mathsf{Cov}[X, X] \\
\mathsf{Var}[aX + b] &= a^2 \mathsf{Var}[X] \\
\mathsf{Cov}[aX + b, cY + d] &= ac\mathsf{Cov}[X, Y] \\
\mathsf{Cov}[X + U, Y + V] &= \mathsf{Cov}[X, Y] + \mathsf{Cov}[X, V] + \mathsf{Cov}[U, Y] + \mathsf{Cov}[U, V]
\end{aligned}$$

– Begriff der Unkorreliertheit zweier Zufallsgrößen: X und Y unkorreliert, falls

$$\mathsf{Cov}[X, Y] = 0 \Leftrightarrow \mathsf{E}[XY] = \mathsf{E}[X]\,\mathsf{E}[Y]$$

– Begriff der Orthogonalität zweier Zufallsgrößen: X und Y orthogonal, falls

$$\mathsf{E}[XY] = 0$$

→ **Standardisierung von Zufallsvariablen:** X sei reelle Zufallsvariable, μ und σ^2 deren Erwartungswert und Varianz. Die Standardisierung von X ist:

$$\mathsf{Y} = \frac{1}{\sigma}(\mathsf{X} - \mu) \qquad \Rightarrow \qquad \mathsf{E}[Y] = 0, \mathsf{Var}[Y] = 1$$

→ **Korrelationskoeffizient**: Beschreibung der Güte eines möglichen linearen Zusammenhangs zwischen den Zufalls variablen X und Y:

$$\varrho_{\mathsf{X},\mathsf{Y}} = \frac{\mathsf{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\mathsf{Var}[X]}\sqrt{\mathsf{Var}[Y]}} = \frac{c_{\mathsf{X},\mathsf{Y}}}{\sigma_{\mathsf{X}}\sigma_{\mathsf{Y}}} \in [-1, 1]$$

Interpretation:

$$\varrho_{\mathsf{X},\mathsf{Y}} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathsf{Y} = a\mathsf{X} + b \text{ mit } a > 0 \\ -1, & \text{falls } \mathsf{Y} = a\mathsf{X} + b \text{ mit } a < 0 \\ 0, & \text{falls } \mathsf{X} \text{ und } \mathsf{Y} \text{ unkorreliert} \end{cases}$$

6 Erzeugende und charakteristische Funktion

Erzeugende Funktion (diskrete Zufallsvariablen)

→ **Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion**: X sei eine diskrete nichtnegative Zufallsvariable

$$G_{\mathsf{X}}(z) = \mathsf{E}\left[z^{\mathsf{X}}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} p_{\mathsf{X}}(k) z^k, |z| \leq 1$$

→ **Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerten und Varianzen**:

$$\begin{aligned} P(\{\mathsf{X} = n\}) &= \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dz^n} G_{\mathsf{X}}(z)\right]_{z=0} \\ \mathsf{E}[X] &= \left[\frac{d}{dz} G_{\mathsf{X}}(z)\right]_{z=1} \\ \mathsf{Var}[X] &= \left[\frac{d^2}{dz^2} G_{\mathsf{X}}(z)\right]_{z=1} - \mathsf{E}[X]^2 + \mathsf{E}[X] \end{aligned}$$

→ **Erzeugende Funktion einer Summe $\mathsf{Z} = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{X}_i$ von stochastisch unabh. Zufallsvariablen X_i**:

$$G_{\mathsf{Z}}(z) = \prod_{i=1}^{n} G_{\mathsf{X}_i}(z)$$

Charakteristische Funktion (stetige Zufallsvariablen)

→ **Charakteristische Funktion**: X sei eine reelle Zufallsvariable

$$\varphi_{\mathsf{X}}(\omega) = \mathsf{E}\left[e^{j\omega\mathsf{X}}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_{\mathsf{X}}(x) \mathrm{d}x$$

→ **Berechnung des Erwartungswerts und höherer Momente**:

$$\mathsf{E}[X^n] = \frac{1}{j^n}\left[\frac{d^n}{d\omega^n}\varphi_{\mathsf{X}}(\omega)\right]_{\omega=0}$$

→ **Charakteristische Funktion einer Summe $\mathsf{Z} = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{X}_i$ von stochastisch unabh. Zufallsvariablen X_i:**

$$\varphi_{\mathsf{Z}}(\omega) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{\mathsf{X}_i}(\omega)$$

Zentraler Grenzwertsatz

Aussage: normierte und zentrierte Summe einer großen Anzahl an unabhängigen und identisch verteilter Zufallsgrößen mit endlichen Erwartungswerten und Varianz ist annähernd standardnormalverteilt

7 Stochastische Prozesse

7.1 Reelle Zufallsfolge

→ **Ensemble und Pfad**: beschreibt unterschiedliche Betrachtungsweise einer Zufallsfolge $(\mathsf{X_n} : n \in \mathbb{N})$

– Ensemble-Darstellung: $\mathsf{S}_n : \Omega_n \times \Omega_{n-1} \times \ldots \times \Omega_1 \to \mathbb{R}$

$$(w_n, \omega_{n-1}, \ldots, \omega_1) = s_n(\omega_n, \omega_{n-1}, \ldots, \omega_1)$$

– Pfad-Darstellung: $\mathsf{S}_n = (\mathsf{S}_n, \mathsf{S}_{n-1}, \ldots, \mathsf{S}_1) : \Omega^{(n)} \to \mathbb{R}^n$

$$\omega_n = \mathsf{s}_n(\omega_n) = (s_n(\omega_n), s_{n-1}(\omega_{\mathsf{n}n}), \ldots, s_1(\omega_{1n}))$$

→ **Autokorrelations- und Autokovarianzfolge**:

$$\begin{aligned} r_{\mathsf{X}}(k,l) &= \mathsf{E}\left[\mathsf{X}_k \mathsf{X}_l\right] \\ c_{\mathsf{X}}(k,l) &= r_{\mathsf{X}}(k,l) - \mu_X(k)\mu_X(l) \end{aligned}$$

→ **Random Walk**: mathematische Modellierung eines des Vorgangs, dass ein Teilchen bei jedem Schritt (Schrittweite δ) mit der Wahrscheinlichkeit p bzw. $p-1$ einen Schritt nach rechts oder links macht; die Richtung der einzelnen Schritte ist hierbei unabhängig voneinader:

$$\begin{aligned} \mathsf{S}_n &= \sum_{i=1}^{n} = \mathsf{X}_i, \text{wobei } P(\{X_i = +\delta\}) = p \text{ und } P(\{\mathsf{X}_i = -\delta\}) = 1 - p \\ \mathsf{E}\left[\mathsf{X}_i\right] &= \delta p - \delta(1-p) = (2p-1)\delta \\ \mathsf{Var}[\mathsf{X}_i] &= \mathsf{E}\left[X_i^2\right] - \mathsf{E}\left[\mathsf{X}_i\right]^2 = 4p(1-p)\delta^2 \\ \mathsf{E}\left[\mathsf{S}_n\right] &= \mathsf{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathsf{X}_i\right] = n(2p-1)\delta \\ \mathsf{Var}[S_n] &\overset{\mathsf{X}_i i.i.d}{=} \mathsf{Var}[\mathsf{X}_i] = 4np(1-p)\delta^2 \end{aligned}$$

→ **Stationarität von Zufallsfolgen**: Folgenelemente sind invariant gegenüber einer Verschiebung der Indizes

Für die Praxis weitaus wichtiger ist die Stationarität im weiteren Sinne, WSS (wide sense stationary):

$$\begin{aligned} \mu_{\mathsf{X}}(i) &= \mu_{\mathsf{X}}(i+k) \\ r_{\mathsf{X}}(i_1, i_2) &= r_{\mathsf{X}}(i_1 + k, i_2 + k) = r_{\mathsf{X}}(i_1 - i_2) = r_{\mathsf{X}}(\tau), \text{mit } \tau = i_1 - i_2 \end{aligned}$$

→ **Konvergenz reeller Zufallsfolgen**

– konvergiert fast sicher (almost surely, a.s.):

$$P\left(\left\{\omega : \lim_{n\to\infty} \mathsf{X}_n(\omega) = \mathsf{X}(\omega)\right\}\right) = 1, \mathsf{X} \overset{a.s.}{\to} \mathsf{X}$$

– konvergiert in Wahrscheinlichkeit (in probability, p.):

$$P(\{\omega : |\mathsf{X}_n(\omega) - \mathsf{X}(\omega)| > \varepsilon\}) = 0, \mathsf{X}_n \overset{p.}{\to} \mathsf{X}$$

- konvergiert im quadratischen Mittel (in the mean square sense, m.s.):

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\left[(X_n(\omega) - \mathsf{X}(\omega))^2\right] = 0, \mathsf{X} \overset{m.s.}{\to} \mathsf{X}$$

- konvergiert in Verteilung (in distribution, d.):

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_{\mathsf{X}}(x), \mathsf{X}_n \overset{d.}{\to} \mathsf{X}$$

→ **Markow-Ungleichung**

$$P\left(\{|\mathsf{X}| \geq \varepsilon\}\right) \leq \frac{\mathsf{E}\left[|\mathsf{X}|\right]}{\varepsilon}$$

→ **Tschebyschow-Ungleichung**

$$P\left(\{|\mathsf{X} - \mathsf{E}\left[\mathsf{X}\right]| \geq \varepsilon\}\right) < \frac{\mathsf{Var}[\mathsf{X}]}{\varepsilon^2}$$

7.2 Markowketten

→ **Definition Markowkette:**

$$p_{\mathsf{X}_{n_k}|X_{n_{k-1}},\ldots,X_{n_1}}(x_{n_k}, \ldots, x_{n_1}) = p_{\mathsf{X}_{n_k}|\mathsf{X}_{n_{k-1}}}(x_{n_k}|x_{n_{k-1}})$$
$$f_{\mathsf{X}_{n_k}|X_{n_{k-1}},\ldots,X_{n_1}}(x_{n_k}, \ldots, x_{n_1}) = f_{\mathsf{X}_{n_k}|\mathsf{X}_{n_{k-1}}}(x_{n_k}|x_{n_{k-1}})$$

Interpretation: Die Verteilung einer Zufallsvariable unter der Bedingung einer gegeben Vergangenheit ($\mathsf{X}_{n_{k-1}}, \ldots, X_{n_1}$ wird nur von der zeitlich am nächsten liegenden Variablen ($X_{n_{k-1}}$) beeinflusst.

Homogene Markowketten liegen vor, falls die Übergangswahrscheinlichkeiten bzw. Übergangsdichten unabhängig vom Index n sind.

→ Beispiele für Markowketten: Randomwalk ($\mathsf{S}_n = \sum_{i=1}^n \mathsf{X}_i$) oder $\mathsf{X}_n = \prod_{i=1}^n \mathsf{W}_i$, mit ($\mathsf{W_i} : i \in \mathbb{N}$) paarweise stochastisch unabhängig

→ **Darstellung von gemeinsamen Zähldichten bzw. Wahrscheinlichkeitsdichten**:

$$p_{\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n}(x_1, \ldots, x_n) = p_{X_1} \prod_{i=2}^n p_{\mathsf{X}_i|\mathsf{X}_{i-1}}(x_i|x_{i-1})$$
$$f_{\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n}(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1} \prod_{i=2}^n p_{\mathsf{X}_i|\mathsf{X}_{i-1}}(x_i|x_{i-1})$$

Beispiel für $n = 3$:

$$p_{\mathsf{X}_1,\mathsf{X}_2,\mathsf{X}_3}(x_1, x_2, x_3) = p_{\mathsf{X}_3|\mathsf{X}_2,\mathsf{X}_1}(x_3|x_2, x_1) p_{\mathsf{X}_2|\mathsf{X}_1}(x_2|x_1) p_{\mathsf{X}_1}(x_1) \overset{\text{Markow}}{=} p_{\mathsf{X}_3|\mathsf{X}_2}(x_3|x_2) p_{\mathsf{X}_2|\mathsf{X}_1}(x_2|x_1) p_{\mathsf{X}_1}(x_1)$$

→ **Chapman-Kolmogorow-Gleichung**: beschreibt Möglichkeiten zur Berechnung von m-Schritt Übergangswahrscheinlichkeiten,- dichten der Form $p_{\mathsf{X}_{n+m}|\mathsf{X}_n}(x_{n+m}|x_n)$, $f_{\mathsf{X}_{n+m}|\mathsf{X}_n}(x_{n+m}|x_n)$

$$p_{\mathsf{X}_{n+m}|\mathsf{X}_n}(x_{n+m}|x_n) = \underbrace{\sum_{x_{n+1}} \cdots \sum_{x_{n+m-1}}}_{\text{Marginalisierung}} \prod_{i=n+1}^{n+m} p_{\mathsf{X}_i|\mathsf{X}_{i-1}}(x_i|x_{i-1})$$

7.3 Reelle Zufallsprozesse

→ **Wiener-Prozess**:

- Definition:

$$\mathsf{S}_t = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{X}_i u(t - iT)$$

- Eigenschaften:
  - ∗ Autokovarianzfunktion, Autokorrelationsfunktion

$$\mu_{\mathsf{W}}(t) = \mathsf{E}[W_t] = \mathsf{E}[\mathsf{W}_t - \mathsf{W}_0] = 0$$
$$r_{\mathsf{W}}(s,t) = c_{\mathsf{W}}(s,t) = \sigma^2 \min(s,t) \qquad \text{(nicht WSS, daher auch nicht stationär!)}$$

→ **Poisson-Prozess**:

- Definition:

$$\mathsf{N}_t = \sum_{i=1}^{\infty} u(t - T_i), \qquad \mathsf{T}_i = \sum_{j=1}^{i} \mathsf{X}_j$$
$$P(\{\mathsf{N}_t = n\}) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

- Eigenschaften:
  - ∗ Zählprozess, die Musterfunktionen sind entsprechend monoton steigend
  - ∗ Zeitintervalle zwischen den Inkrementierungen sind unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Parameter λ
  - ∗ Autokorrelationsfunktion, Autokovarianzfunktion

$$\mu_{\mathsf{N}}(t) = \mathsf{E}[\mathsf{N}_t] = \mathsf{E}[\mathsf{N}_t - \mathsf{N}_0] = \lambda t$$
$$r_{\mathsf{N}}(s,t) = \lambda \min(s,t) + \lambda^2 st$$
$$c_{\mathsf{N}}(s,t) = r_{\mathsf{N}}(s,t) - \mu_{\mathsf{N}}(s)\mu_{\mathsf{N}}(t) = \lambda \min(s,t)$$

7.4 Eigenschaften der Korrelationsfunktion von gemeinsam WSS Zufallsprozessen

→ Eigenschaften:

$$r_{\mathsf{X}}(\tau) \leq r_{\mathsf{X}}(0)$$
$$|r_{\mathsf{X},\mathsf{Y}}(\tau)| \leq \sqrt{r_{\mathsf{X}}(0) r_{\mathsf{Y}}(0)}$$
$$r_{\mathsf{X}}(\tau) = r_{\mathsf{X}}(-\tau)$$
$$\mathbf{a}^T \mathbf{R}_{\mathsf{X}} \mathbf{a} \geq 0, [\mathbf{R}]_{k,l} = r_{\mathsf{X}}(t_k, t_l)$$

7.5 Leistungsdichtespektrum

→ **Definition:**

$$\mathsf{S}_{\mathsf{X}}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{\mathsf{X}}(\tau) e^{-j\omega\tau} \mathrm{d}\tau$$
$$S_{\mathsf{X}}(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\, r_{\mathsf{X}}(\tau)$$

→ **Eigenschaften:**

$$\mathsf{S}_\mathsf{X}(f) = \mathsf{S}_X^*(f), \forall f \in \mathbb{R}$$
$$\mathsf{S}_\mathsf{X}(f) = \mathsf{S}_\mathsf{X}(-f), \forall f \in \mathbb{R}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathsf{S}_\mathsf{X}(f)\mathrm{d}f = r_\mathsf{X}(0) = \sigma_\mathsf{X}^2 + \mu_X^2$$
$$S_\mathsf{X}(f) \geq 0, \forall f \in \mathbb{R}$$

→ **Zusammenhang Leistungsdichtespektrum und Übertragungsfunktion $A(f)$ eines LTI-Systems**

$$\mathsf{S}_\mathsf{Y}(f) = |A(f)|^2\,\mathsf{S}_\mathsf{X}(f)$$
$$\mathsf{S}_{\mathsf{Y},\mathsf{X}}(f) = A(f)\mathsf{S}_\mathsf{X}(f)$$
$$\mathsf{S}_{\mathsf{X},\mathsf{Y}}(f) = A^*(f)\mathsf{S}_\mathsf{X}(f)$$