Stochastische Signale 10/12/2013

Erwartungswert & Varianz

Def: $E[X] \overset{\text{diskr.}}{=} \sum_{k \in \Omega} k \, p_X(k)$

$\overset{\text{stetig}}{=} \int_{x \in \Omega} x \, f_X(x) \, dx$

$$\boxed{\text{lineare Operator: } E[\alpha X + \beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y]}$$

Varianz: $Var[X] = E[(X - E[X])^2]$

$= E[X^2] - E[X]^2$

$= E[X^2] \Big|_{\mu_X = 0}$

Kovarianz: $Cov[X, Y] = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$

$= E[XY] - E[X]E[Y]$

Korrelation: $E[XY]$

- X, Y sind unkorreliert $\Longleftrightarrow$ $Cov[X, Y] = 0$

- X, Y sind orthogonal $\Longleftrightarrow$ $E[XY] = 0$

Zusammenhang Unkorreliertheit / stoch. Unabh.

X, Y stoch. unabh. $\Longleftrightarrow$ $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$

$$E[XY] = \int\limits_{y \in \Omega_Y} \int\limits_{x \in \Omega_X} x y \, f_{X,Y}(x,y) \, dx \, dy$$

$$= \int \int x y \; f_X(x) \cdot f_Y(y) \, dx \, dy$$

$$= \int\limits_{x \in \Omega_X} x f_X(x) \, dx \cdot \int\limits_{y \in \Omega_Y} y \, f_Y(y) \, dy =$$

$$= E[X] \cdot E[Y] \longrightarrow \operatorname{Cov}[X,Y] = 0$$

Also: Unter der Voraussetzung, dass X, Y stoch. unabh. sind, folgt auch die Unkorreliertheit.

X, Y unkorreliert: $E[XY] = E[X]\,E[Y]$.

$$\operatorname{Var}\left[\sum X_i\right] \neq \sum \operatorname{Var}[X_i]$$

$$\operatorname{Var}\left[\sum X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}[X_i] + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \operatorname{Cov}[X_i X_j]$$

$$\rightarrow \operatorname{Var}[X+Y] = \operatorname{Var}[X] + \operatorname{Var}[Y] + 2\operatorname{Cov}[X,Y]$$

→ Hier reicht eine Unkorreliertheit!

Korrelationskoeffizient

$$\rho_{XY} = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]}\,\sqrt{Var[Y]}}$$

→ Maß für die Linearität zwischen X, Y

→ $\rho_{XY} \in [-1 \quad 1]$

falls linearer Zusammenhang besteht

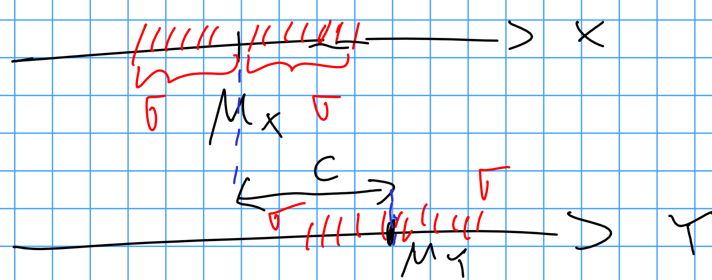
Quiz 7

Aufgabe 1

$$Var[\underbrace{X+c}_{Y}] \overset{!}{=} Var[X] \quad , \; E[Y] = E[X+c] = \mu_X + c$$

$$Var[Y] = E[(Y-E[Y])^2] = E[(X+c-\mu_X-c)^2]$$

$$= E[(X-\mu_X)^2] = Var[X]$$



Aufgabe 2

Unkorreliertheit: $Cov[X,Y] = 0$

$$E[XY] - E[X]E[Y] = 0$$

Orthogonalität: $E[XY] = 0$

Beide Def äquivalent, falls entweder $E[X]=0$ oder $E[Y]=0$!

Zusatzaufgabe

$X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ $\qquad Cov[X,Y] = \rho_{XY}\,\sigma_X\,\sigma_Y$

$Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

$\hat{Y} = \alpha X + \beta$

$$\alpha^*, \beta^* = \arg\min \; E[(\hat{Y} - Y)^2]$$

$$E[(\hat{Y} - Y)^2] = E[(\alpha X + \beta - Y)^2] =$$

$$= E[\alpha^2 X^2 + 2\alpha\beta X + \beta^2 - 2\alpha X Y - 2\beta Y + Y^2] =$$

$$= \alpha^2 E[X^2] + 2\alpha\beta \underbrace{\mu_X}_{E[X]} + \beta^2 - 2\alpha E[XY] - 2\beta\mu_Y + E[Y^2]$$

(I) $$\frac{\partial E[(\hat{Y} - Y)^2]}{\partial \alpha} = 2\alpha E[X^2] + 2\beta\mu_X - 2E[XY] \overset{!}{=} 0$$

$$(II)\quad \frac{\partial E\left[(\hat{Y}-Y)^2\right]}{\partial \beta} = 2\alpha\mu_X + 2\beta - 2\mu_Y \overset{!}{=} 0$$

(I) in (II) $\quad \alpha = \dfrac{E[XY] - \mu_X \beta}{E[X^2]}$

$$\beta = \mu_Y - \alpha\mu_X =$$

$$= \mu_Y - \frac{E[XY] - \mu_X\beta}{E[X^2]}\mu_X$$

$$\beta^* = \frac{\mu_Y - \frac{E[XY]}{E[X^2]}\mu_X}{1 - \frac{\mu_X^2}{E[X^2]}} =$$

$E[X^2] - \mu_X^2 = \sigma_X^2$

$$= \frac{E[X^2]\mu_Y - E[XY]\mu_X}{\sigma_X^2} =$$

$$= \frac{(\sigma_X^2 + \mu_X^2)\mu_Y - \overbrace{E[XY]}^{(\rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y + \mu_X\mu_Y)}\cdot\mu_X}{\sigma_X^2}$$

$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$

$$= \frac{\sigma_X^2\mu_Y - \sigma_X\sigma_Y\rho_{XY}\mu_X}{\sigma_X^2} = \mu_Y - \mu_X\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho_{XY}$$

$$\alpha^* = \frac{E[XY] - \mu_X \beta}{E[X^2]} = \frac{E[XY] - \mu_X \mu_Y + \mu_X^2 \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \rho_{XY}}{E[X^2]} =$$

$$= \frac{Cov[X,Y] + \frac{\mu_X^2}{\sigma_X^2} Cov[X,Y]}{\sigma_X^2 + \mu_X^2} =$$

$$= \frac{Cov[X,Y]\left(1 + \frac{\mu_X^2}{\sigma_X^2}\right)}{\sigma_X^2 \left(1 + \frac{\mu_X^2}{\sigma_X^2}\right)} = \frac{Cov[X,Y]}{\sigma_X^2}$$

Setzt man nun α^* und β^* in das Modell $\hat{Y} = \alpha X + \beta$ ein, so ergibt sich

$$\hat{Y} = \frac{Cov[X,Y]}{\sigma_X^2} X + \mu_Y - \mu_X \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \rho_{XY} =$$

$$= \frac{Cov[X,Y]}{\sigma_X^2} X + \mu_Y - \mu_X \frac{Cov[X,Y]}{\sigma_X^2}$$

$$= \mu_Y + \frac{Cov[X,Y]}{\sigma_X^2} (X - \mu_X)$$

Anmerkung: Die Stationaritätsbedingungen waren im vorliegenden Fall auch notwendig, wie die Auswertung der zweiten Ableitungen zeigt:

$$\frac{\partial^2 E\left[(Y-\hat{Y})^2\right]}{\partial \alpha^2} = 2E\left[X^2\right] \geq 0$$

$$\frac{\partial^2 E\left[(Y-\hat{Y})^2\right]}{\partial \beta^2} = 2 > 0$$

2. Laut Aufgabe ist der beste Schätzer $T(X)$ für $\hat{Y}$ als $\hat{Y} = T(X) = E[Y|X]$ gegeben. Da nach Aufgabenstellung die ZV $Y|X=x$ den Erwartungswert

$$E[Y|X=x] = \mu_Y + \frac{c_{X,Y}}{\sigma_X^2}(x-\mu_X)$$

hat, folgt für $\hat{Y}$ entsprechend:

$$\hat{Y} = \mu_Y + \frac{c_{X,Y}}{\sigma_X^2}(X-\mu_X)$$

Offensichtlich liefert ein simples lineares Modell im vorliegenden Falle (d.h. unter der Voraussetzung von Gaußschen Verteilungen für X und Y) den im MSE-Sinne besten Schätzer.

mean square error

$E[(Y-\hat{Y})^2]$

Im Allgemeinen ist dem nicht so, d.h. der lineare Ansatz ist normalerweise nicht MSE optimal.