Stochastische Signale, 03/12/2013

Notiztitel 03.12.2013

Einführung: Erwartungswert & Varianz

$$E[X] = \sum_{x \in \mathcal{X}} x \, p_X(x)$$

$$E[g(X)] = \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x) \, p_X(x)$$

a) $$E[aX + b] = \sum_{x \in \mathcal{X}} (ax + b) \, p_X(x) = \sum_{x \in \mathcal{X}} a x \, p_X(x) + \sum_{x \in \mathcal{X}} b \, p_X(x) =$$

$$= a \sum_{x \in \mathcal{X}} x \, p_X(x) + b \sum_{x \in \mathcal{X}} p_X(x) =$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{=1 \text{, da } p_X(x) \text{ PMF}}$

$$= a\,E[X] + b \cdot 1$$

$\Rightarrow$ Ergebnis: Erwartungswertoperator $E[\cdot]$ ist ein linearer Operator.

[linearer Operator: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $f(ax+by) = a f(x) + b f(y)$]

b) $Var[aX+b] = a^2 \, Var[X]$

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2] =$$

$$= E[X^2] - 2E[X]E[X] + E[X]^2 =$$

$$E[E[X]] = E[X]$$

$$E[b] = b$$

$$= \boxed{E[X^2] - E[X]^2}$$

$$Var[aX+b] = E[(aX+b)^2] - E[aX+b]^2 =$$

$$= E[a^2X^2 + 2abX + b^2] - (aE[X] + b)^2 =$$

$$= a^2E[X^2] + \underbrace{2abE[X]} + \underbrace{b^2} - (a^2E[X]^2 + \underbrace{2abE[X]} + \underbrace{b^2})$$

$$= a^2 E[X^2] - a^2 E[X]^2 = a^2 \operatorname{Var}[X]$$

Standardmodelle

Diskrete:

- Gleichverteilung: $p_X(k) = \frac{1}{|\mathcal{C}|} \qquad k \in \mathcal{C}$

- Bernoulli-Verteilung (Indikator-Verteilung)

$$p_X(k) = \begin{cases} p & k = 1 \\ 1-p & k = 0 \end{cases} \qquad k \in \mathcal{C}, \quad |\mathcal{C}| = 2$$

- Binomialverteilung: n-maliges, stochastisch unabhängiges Ausführen eines Bernoulli-Experiments

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

geodächtnislose Verteilung

- geometrische Verteilung

$$p_X(k) = p\,(1-p)^{k-1}$$

→ k-maliges Ausführen von unabhängigen Bernoulli-Experimenten: Wahrscheinlichkeit dass beim k-ten Mal, der Treffer zum ersten Mal erscheint

$$P(X > n+k \mid X > n) \overset{!}{=} P(X > k)$$

- Poisson-Verteilung

$$p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

↳ als Grenzwert der Binomialvert.

$p \to 0, \ n \to \infty$

<u>Stetige Verteilungen:</u> Gleichverteilung: $f_X(x) = \frac{1}{b-a} \qquad x \in [a, b]$

gedächtnislos { Exponentialvert. $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad x \in \mathbb{R}_0^+$

Normalverteilung:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ: Erwartungswert

σ^2: Varianz

Quiz 6

$$B_n(p,k): \; p_X(k) = \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} \, p^k$$

$\hookrightarrow$ Poisson-Verteilung: $\quad n \to \infty$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad p \to 0$

Def: $\lambda := n \cdot p$

$\quad\quad \to p = \dfrac{\lambda}{n}$

$$\lim_{n \to \infty} \binom{n}{k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k =$$

$$\lim_{n \to \infty} \binom{n}{k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} \cdot \left(\frac{\frac{\lambda}{n}}{1 - \frac{\lambda}{n}}\right)^k =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{\lambda}{n-\lambda}\right)^k =$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{e^{-\lambda}} \cdot \underbrace{\frac{\prod_{i=n-k+1}^{n} i}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{(n-\lambda)^k}}_{\frac{\lambda^k}{k!} \cdot \underbrace{\frac{\prod_{i=n-k+1}^{n} i}{(n-\lambda)^k}}_{\frac{n^k + O(n^{k-1})}{n^k + O(n^{k-1})}}}$$

$$\prod_{i=n-k+1}^{n} i \Rightarrow n(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

Aufgabe 2 : siehe vorher

Aufgabe 3 : siehe vorher

standardnormalverteilt $\mu_X = 0$, $\sigma^2 = 1$

Aufgabe 4 :

$$\left.\begin{array}{l} X \sim \mathcal{N}(0,1) \\ \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} Y = g(X) \\ E[Y] = b \\ Var[Y] = a \end{array}\right\} \quad Y \sim \mathcal{N}(b, a)$$

→ Lineare Funktionen ändern den Typ der Verteilung nicht

$$Y = \alpha X + \beta$$

$$E[Y] = \alpha E[X] + \beta = \boxed{\beta \overset{!}{=} b}$$

$$Var[Y] = Var[\alpha X + \beta] = \alpha^2 Var[X]$$

$$= \alpha^2 \overset{!}{=} a$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \sqrt{a}}$$

Aufgabe 2 **Handyklingeln in der Vorlesung** (19 Punkte) 19

Angenommen, ein Student führt ein Handy mit sich, das mit einer Wahrscheinlichkeit von p während einer Vorlesung zumindest einmal klingelt.

Sei K eine diskrete Zufallsvariable, die angibt, ob das Handy in der Vorlesung mindestens einmal klingelt ($K = 1$) oder nicht ($K = 0$).

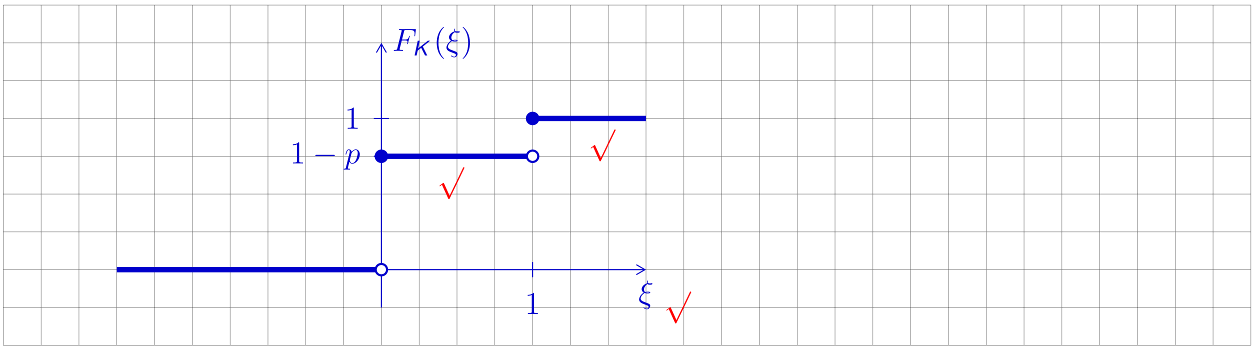
a)* Welcher aus der Vorlesung bekannte Verteilungstyp ist geeignet, um K zu beschreiben? 1

Bernoulli-Verteilung √

b)* Geben Sie den Erwartungswert von K an. 1

$$\mathrm{E}[K] = p \cdot 1 + (1 - p) \cdot 0 = p$$ √

c)* Zeichnen Sie die kumulative Verteilungsfunktion $F_K(\xi)$. Achten Sie auf eine korrekte Beschriftung der Achsen und kennzeichnen Sie bei Unstetigkeitsstellen die Zugehörigkeit der Randpunkte. 3



Nun soll eine Zufallsvariable X betrachtet werden, die angibt, wie oft das Handy während der Vorlesung klingelt.

d)* Warum sind in diesem Modell K und X stochastisch abhängig? 1

Weil die Realisierung von K durch die Realisierung von X eindeutig festgelegt ist. √

X werde beschrieben durch die Zähldichte

$$p_X(k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

1 e)* Wie nennt man diesen Verteilungstyp?

Poisson-Verteilung √

2 f)* Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathsf{P}(\{X = 0\})$.

$\mathsf{P}(\{X = 0\}) = p_X(0)$ √ $= \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = \mathrm{e}^{-\lambda}$ √

Damit das Modell sinnvoll ist, muss $\mathsf{P}(\{K = 1\}) = \mathsf{P}(\{X > 0\})$ gelten.

2 g)* Wie muss hierzu λ für gegebenes p gewählt werden?

$p = \mathsf{P}(\{K = 1\}) \stackrel{!}{=} \mathsf{P}(\{X > 0\}) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$ √

$\lambda = -\ln(1 - p)$ √

1 h)* Geben Sie den Erwartungswert von X in Abhängigkeit von λ an.

$\mathrm{E}[X] = \lambda$ √

1 i) Geben Sie an, wie sich $\mathrm{E}[X]$ für $p \to 0$ verhält, wenn λ gemäß Aufgabe g) gewählt wird.

$\mathrm{E}[X] = \lambda = -\ln(1 - p) \stackrel{p \to 0}{\to} 0$ √

33

Aufgabe 2 **Kombinatorik und Standardmodelle** (33 Punkte)

In einem Spiel werfen Konstantin und Zara eine faire Münze 3 mal nacheinander. Wenn nach 3 Würfen {Kopf} häufiger als {Zahl} aufgetreten ist gewinnt Konstantin, andernfalls gewinnt Zara. Die Münzwürfe seien allesamt stochastisch unabhängig.

1

a)* Welches stochastische Standardmodell modelliert die Münze als Zufallsexperiment?

Bernoulliverteilung

1

b)* Mit welchem stochastischen Standardmodell können Sie die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass {Zahl} nach 3 Würfen genau 0, 1, 2 oder 3 mal aufgetreten ist.

Binomialverteilung

2

c)* Berechnen Sie Wahrscheinlichkeit, dass Zara gewinnt.

Zara gewinnt, falls mindestens 2 mal Zahl geworfen wird:

$$\mathsf{P}\left(\{\text{“2 mal Zahl”}\} \cup \{\text{“3 mal Zahl”}\}\right) =$$

$$\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 3\,\frac{1}{8} + 1\,\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

2

d)* Berechnen Sie Wahrscheinlichkeit, dass Zara gewinnt, wenn der erste Wurf {Zahl} war und der zweite und dritte Münzwurf noch ausstehen.

Zara verliert nur dann, wenn jetzt 2 mal Kopf geworfen wird.

Daher gewinnt Zara mit Wahrscheinlichkeit $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

Peter und Paula spielen das gleiche Münzspiel nun mehrere Runden hintereinander. Allerdings werfen sie die Münze in jeder Runde nur dann ein drittes mal, wenn der erste und der zweite Münzwurf noch keinen eindeutigen Gewinner der Runde festgelegt haben. Das heißt, eine Runde kann entweder aus 2 oder aus 3 Würfen bestehen, abhängig davon, was die ersten beiden Münzwürfe in der Runde ergeben haben.

e)* Welche 2-er Tupel von {Kopf} und {Zahl} können als Ergebnis der ersten beiden Münzwürfe im Allgemeinen auftreten? Kürzen Sie {Kopf} mit K und {Zahl} mit Z ab. 2

$$\{\mathrm{KK}, \mathrm{ZZ}, \mathrm{KZ}, \mathrm{ZK}\}$$

f) Berechnen sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Runde genau 2 Würfe lang ist. 1

$$\{\text{"2 Würfe"}\} \implies \text{Ereignis } \{\mathrm{KK}\} \text{ oder } \{\mathrm{ZZ}\} \text{ ist aufgetreten:}$$

$$\mathsf{P}\left(\{\text{"2 Würfe"}\}\right) = \mathsf{P}\left(\{\mathrm{KK}\} \cup \{\mathrm{ZZ}\}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

g) Berechnen sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Runde genau 3 Würfe lang ist. 1

Komplementärereignis zu "2 Würfe":

$$\mathsf{P}\left(\{\text{"3 Würfe"}\}\right) = 1 - \mathsf{P}\left(\{\text{"2 Würfe"}\}\right) = \frac{1}{2}$$

h)* Welche 2-er Tupel von {Kopf} und {Zahl} können als Ergebnis der ersten beiden Münzwürfe aufgetreten sein, wenn entschieden wurde auf den dritten Wurf zu verzichten? 1

$$\{\mathrm{KK}, \mathrm{ZZ}\}$$

Die Zufallsvariable Z_r zeige nun an, wie oft das Ereignis {Zahl} in der r-ten Runde aufgetreten ist.

2 i) Berechnen Sie die bedingte Zähldichte von Z_r unter der Bedingung, dass die r-te Runde 2 Münzwürfe lang war.

$$\mathsf{P}\left(\{Z_r = n\} | \{\text{"2 Würfe"}\}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } n = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } n = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1 j)* Welche 3-er Tupel von {Kopf} und {Zahl} können als Ergebnis von 3 Münzwürfen aufgetreten sein, wenn der dritte Wurf notwendig war, um die Runde zu entscheiden?

$$\{\mathrm{KZK}, \mathrm{KZZ}, \mathrm{ZKK}, \mathrm{ZKZ}\}$$

2 k) Berechnen Sie die bedingte Zähldichte von Z_r unter der Bedingung, dass die r-te Runde 3 Münzwürfe lang war.

$$\mathsf{P}\left(\{Z_r = n\} | \{\text{"3 Würfe"}\}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } n = 1 \\ \frac{1}{2} & \text{für } n = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

3 l) Bestimmen Sie nun die (unbedingte) Zähldichte von Z_r.

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\left(\{Z_r = n\}\right) &= \mathsf{P}\left(\{Z_r = n\} | \{\text{"2 Würfe"}\}\right) \mathsf{P}\left(\{\text{"2 Würfe"}\}\right) \\ &\quad + \mathsf{P}\left(\{Z_r = n\} | \{\text{"3 Würfe"}\}\right) \mathsf{P}\left(\{\text{"3 Würfe"}\}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{für } n = 0 \\ \frac{1}{4} & \text{für } n = 1 \\ \frac{1}{2} & \text{für } n = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Peter und Paula spielen das Spiel nun R Runden und hören dann auf zu spielen. Die Zufallsvariable $Z = \sum_{r=1}^{R} Z_r$ zeige nun an, wie oft das Ereignis {Zahl} insgesamt nach R Runden aufgetreten ist.

Für alle folgenden Teilaufgaben ist nicht von Bedeutung, wieviele der R Runden Peter (oder Paula) gewonnen oder verloren hat.

m) Begründen Sie, ob die Zufallsvariable Z und die Zufallsvariable Z_1 unkorreliert, negativ korreliert oder positiv korreliert sind. 1

"positiv korrelliert"

da z.B. jede Erhöhung von Z_1 eine Erhöhung von Z bedingt.

n) Begründen Sie, ob Z_1 und Z_2 unkorreliert, negativ korreliert oder positiv korreliert sind. 1

"unkorrelliert", da Z_1 und Z_2 Funktionen von unterschiedlichen, stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen (Münzwürfen) sind.

o) Bestimmen Sie nun die Zähldichte der Funktion von Zufallsvariablen $Y = Z_1 + Z_2$ unter der Bedingung, dass die erste Runde 2 Würfe lang war und die zweite Runde 3 Würfe lang war. Nutzen Sie hierfür unter anderem Ihre Ergebnisse zu Teilaufgaben i), k) und n). 4

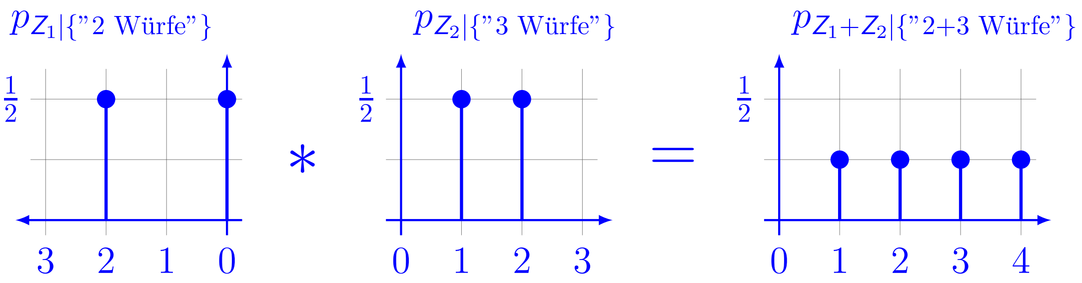
(mehr Platz auf der nächsten Seite)

Mit der Erkenntnis zur stochastischen Unabhängigkeit aus n) sind mehrere Lösungwege möglich:

1) Faltung der WDFen aus i) und k)

2) Kombinatorische Verknüpfung der Ereignisse aus i) und k)

1)



2)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(\{Z_1+Z_2=0\}) &= \mathsf{P}(\{Z_1\le 0\}\cap\{Z_2\le 0\}) = \frac{1}{2}\mathsf{P}(\varnothing) &&= 0\\
\mathsf{P}(\{Z_1+Z_2=1\}) &= \mathsf{P}(\{Z_1=0\}\cap\{Z_2=1\}) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} &&= \frac{1}{4}\\
\mathsf{P}(\{Z_1+Z_2=2\}) &= \mathsf{P}(\{Z_1=0\}\cap\{Z_2=2\}) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} &&= \frac{1}{4}\\
\mathsf{P}(\{Z_1+Z_2=3\}) &= \mathsf{P}(\{Z_1=2\}\cap\{Z_2=1\}) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} &&= \frac{1}{4}\\
\mathsf{P}(\{Z_1+Z_2=4\}) &= \mathsf{P}(\{Z_1=2\}\cap\{Z_2=2\}) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} &&= \frac{1}{4}\\
\mathsf{P}(\{Z_1+Z_2>4\}) &= 1-\mathsf{P}(\{Z_1+Z_2\}\le 4) &&= 0
\end{aligned}
$$

Es sei bekannt, dass am Ende Spiels (also nach R abgeschlossenen Runden) die Münze insgesamt 10 mal geworfen wurde.

2 p)* Wieviele Runden wurden möglicherweise gespielt? Bestimmen Sie alle Werte, die die Zufallsvariable R annehmen kann, unter der Bedingung dass die Münze 10 mal geworfen wurde.

2+2+2+2+2 = 10

2+2+3+3 = 2+3+2+3 = 3+2+2+3 = ... = 3+3+2+2 = 10

5 Runden mit {"2 Würfe"} oder eine der $\binom{4}{2}$ Kombinationen von 2 mal {"2 Würfe"} und 2 mal {"3 Würfe"} ergeben in Summe jeweils 10 Würfe.

Das Ergebnis lautet also: $R \in \{4, 5\}$.

q) Berechnen Sie nun die bedingte Zähldichte von R unter der Bedingung dass die Münze 10 mal geworfen wurde. 6

Hinweis: Überlegen Sie hierzu, welche Kombinationen von 2-er und 3-er Münzwurfrunden zu insgesamt 10 Münzwürfen in R Runden führen und mit welcher Wahrscheinlichkeit diese Kombinationen auftreten.

Zunächst die unbedingten Wahrscheinlichkeiten:

$$\mathsf{P}\left(\{R=5\}\right) = \mathsf{P}\left(\{\text{"2 Würfe"}\}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left(\{R=4\}\right) &= \binom{4}{2} \mathsf{P}\left(\{\text{"2 Würfe"}\}\right)^2 \mathsf{P}\left(\{\text{"3 Würfe"}\}\right)^2 \\ &= \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 6\left(\frac{1}{2}\right)^5\end{aligned}$$

Daraus bestimmen wir nun die bedingten Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left(\{R=5\}|\{\text{"10 Würfe"}\}\right) &= \mathsf{P}\left(\{R=5\}|\{R=4\}\cup\{R=5\}\right) \\ &= \frac{\mathsf{P}\left(\{R=5\}\right)}{\mathsf{P}\left(\{R=4\}\right)+\mathsf{P}\left(\{R=5\}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 6\cdot 2\left(\frac{1}{2}\right)^5} \\ &= \frac{1}{13}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left(\{R=4\}|\{\text{"10 Würfe"}\}\right) &= \mathsf{P}\left(\left(\{R=5\}|\{\text{"10 Würfe"}\}\right)^{\mathsf{C}}\right) \\ &= 1-\frac{1}{13} \\ &= \frac{12}{13}\end{aligned}$$