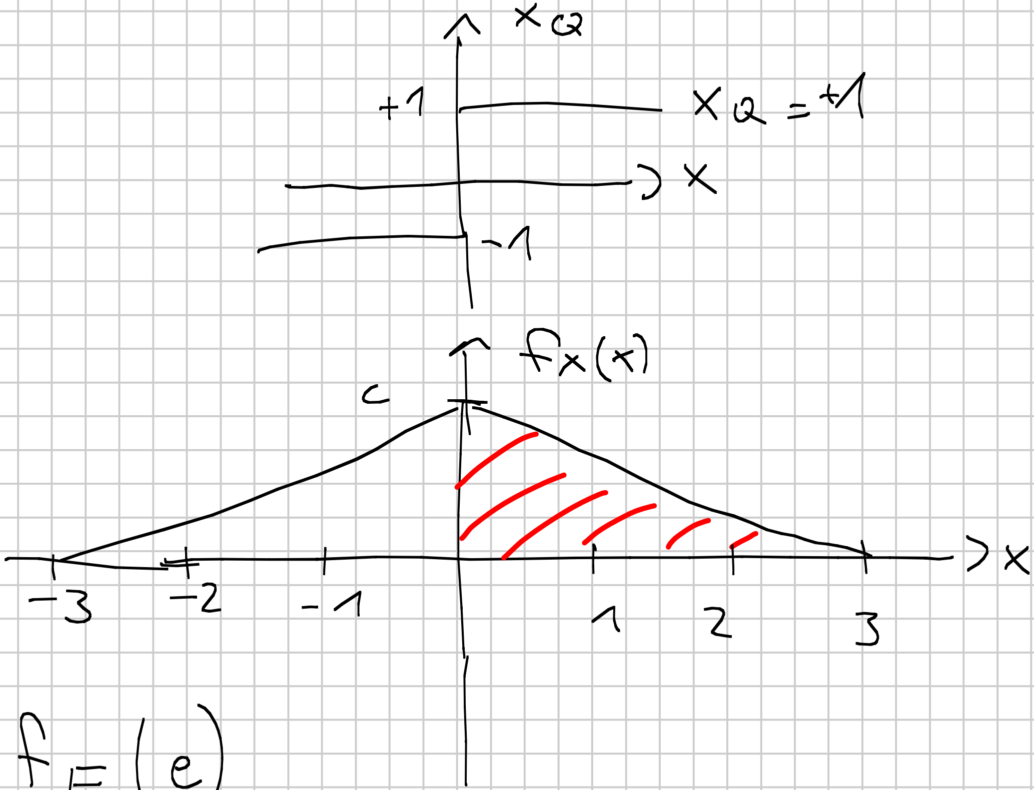
Stochastische Signale – 26/11/2013

Notiztitel 26.11.2013

geg: Quantisierer: 1 bit ($\Rightarrow$ Untersuche das Vorzeichen)



$$e = x - x_Q$$

$$= \begin{cases} x - 1 & \forall\, x \geq 0 \\ x + 1 & \forall\, x < 0 \end{cases}$$

ges. $f_E(e)$

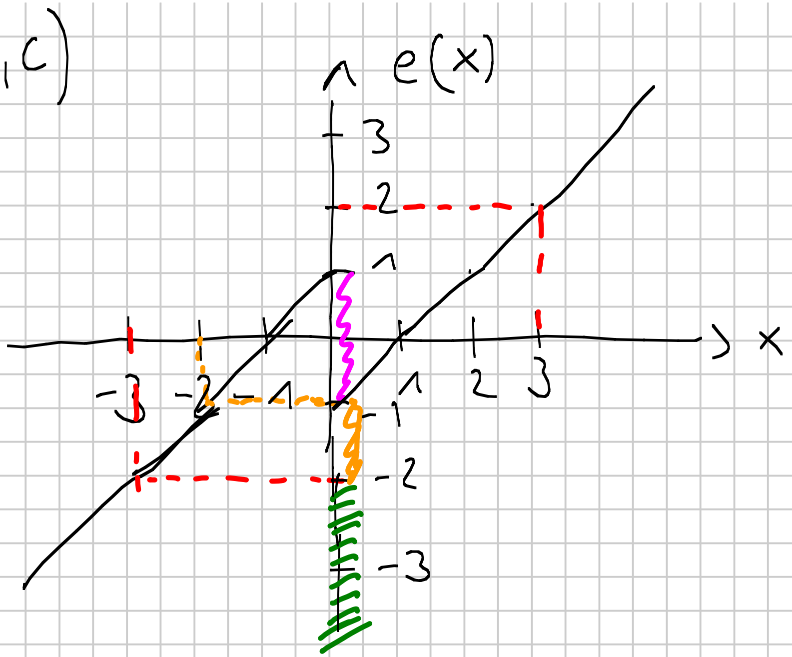
b) ges: c

Lös: $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \overset{!}{=} 1$ Anschaulich: Fläche unter der Dichte $\overset{!}{=} 1$

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot c = 0{,}5$$

$$c = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

a, c)



$$e = \begin{cases} x - 1 & \forall x \geq 0 \\ x + 1 & \forall x < 0 \end{cases}$$

$x = e - 1$

$$P(\{-\infty < E \leq e\})\Big|_{e \leq -2} = P(\{-\infty < X \leq e-1\})\Big|_{e\leq -2} = \int_{-\infty}^{e-1} f_X(x)\,dx = \underline{\underline{0}}$$

d) $$P(\{-2 < E \leq e\})\Big|_{-2 \leq e \leq -1} = P(\{-3 < X \leq e-1\}) = \int_{-3}^{e-1} f_X(x)\,dx = \int_{-3}^{e-1} \frac{1}{9}x + \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{18}e^2 + \frac{2}{9}e + \frac{2}{9}$$

e) $P(\{-1 \leq E < e\})\Big|_{-1 \leq e \leq 1} =$

$$P(\{-2 < X < e-1\}) + P(\{0 < X < e+1\}) =$$

$$= \int_{-2}^{e-1} f_X(x)\,dx + \int_{0}^{e+1} f_X(x)\,dx = \frac{8}{18}e + \frac{4}{9}$$

$\hookrightarrow \frac{1}{9}x + \frac{1}{3}$ $\qquad$ $\hookrightarrow -\frac{1}{9}x + \frac{1}{3}$

Achtung: Die Zweiteilung ist hier nötig, da der Bereich $-1 \leq E < e\big|_{-1 \leq e \leq 1}$ durch zwei Bereiche von X entstanden sein kann

Funktionen von Zufallsvariabeln

Ausgangssituation: $f_X(x)$

$Y = g(X)$

ges: $f_Y(y)$

Lös: Idee: $f_Y(y) = \frac{d}{dy} P(\{Y \leq y\}) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$

$= \frac{d}{dy} P(\{g(X) \leq y\}) = \frac{d}{dy} P(\{X \leq g^{-1}(y)\})$

$\uparrow$

$\rightarrow$ $g^{-1}(y)$ muss existieren

$\rightarrow$ bijektiv

$$= \frac{d}{dy} F_X\left(g^{-1}(y)\right) = f_X\left(g^{-1}(y)\right) \underbrace{\frac{d}{dy} g^{-1}(y)}$$

Was ist Ableitung der Umkehrfunktion?

Exkurs: $\displaystyle \frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$

$$= f_X\left(g^{-1}(y)\right) \cdot \frac{1}{\left.\frac{d}{dx} g(x)\right|_{x=g^{-1}(y)}}$$

Allgemein:

$$\boxed{f_Y(y) = \sum_{x_i} f_X(x_i) \cdot \left(\left| \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=x_i} \right)^{-1} \qquad y - g(x_i) = 0}$$

Summe v. ZV:

$$Z = X + Y$$

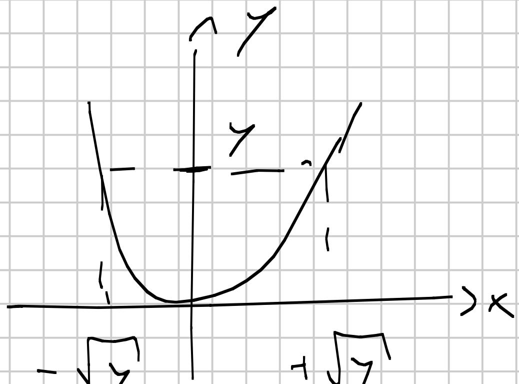
geg: $f_X(x)$, $f_Y(y)$ ges: $f_Z(z)$

Lös: $f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z)$ falls X, Y stochastisch unabhängig

Quiz 5

1. Warum ist die Berechnung der x_i notwendig?

z.B.



$y = x^2$

Nst:

$y - g(x_i) = 0$

Idee: Finde alle x, die auf ein geg. y abbilden

Korrespondenz bei diskreten ZV:

$P_X(x)$; $X \in \{-1, 0, 1\}$

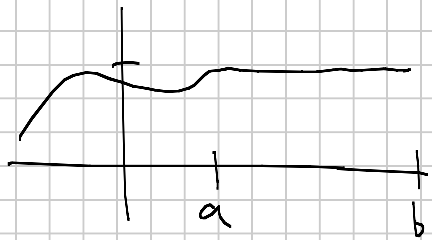
$Y = X^2$ $\quad Y \in \{0, 1\}$ $\quad P_Y(1) = P_X(-1) + P_X(1)$

$\Rightarrow$ Notwendig bei Funktionen, die ihre Monotonie ändern

b) $\exists\ [a, b]$ $\quad g(x) = \text{const.} \quad \forall x \in [a, b]$, dann sei Y nicht stetig

$$f_Y(y) = \sum f_X(x_i) \left(\left| \frac{d\,g(x)}{dx} \right| \Bigg|_{x = x_i} \right)^{-1}$$

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x} = 0 \quad \forall x \in [a, b]$$



$\Rightarrow$ Inverse existiert nicht.

c) X stetig $f_X(x)$

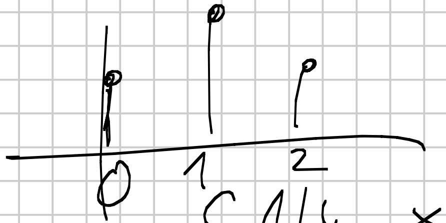
Y diskret $p_Y(y)$ $\xrightarrow[\text{als PDF}]{\text{schreibe die PMF}}$ $f_Y(y) = \sum_{i=1}^{N} p_i \, \delta(y - y_i)$

$$Z = X + Y \xrightarrow[X,Y \text{ unabh.}]{} f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z) =$$

∞

$$f(x)\cdot\delta(x-a)$$
$$= f(a)\,\delta(x-a)$$

PMF



$$p_X(x) = \begin{cases} 1/4 & x=0 \\ 2/4 & x=1 \\ 1/4 & x=2 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{4}\delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x-1) + \frac{1}{4}\delta(x-2)$$

$$= \int_{-\infty} f_X(\tau)\, f_Y(z-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(\tau) \sum_{i=1}^{N} p_i\, \delta(z-\tau-y_i)\, d\tau =$$

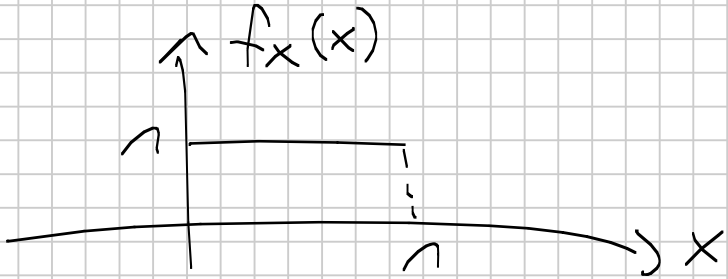
$$= \sum_{i=1}^{N} p_i \int_{-\infty}^{\infty} f_X(\tau)\, \delta(z-\tau-y_i)\, d\tau =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} p_i \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y_i)\, \delta(z-\tau-y_i)\, d\tau$$

$$= \sum_{i=1}^{N} p_i\, f_X(z-y_i)$$

$\Rightarrow$ Z ist wiederum eine stetige ZV!

d) $X \sim Unif(0,1)$



$$Y = -\ln X$$

$$f_Y(y) = \sum_{x_i} f_X(x_i) \left(\left| \frac{dy}{dx} \right| \Bigg|_{x=x_i} \right)^{-1}$$

$Y \in (0; +\infty)$ Neuer Wertebereich!

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}$$

$$y - g(x_i) \overset{!}{=} 0$$

$$y + \ln x_i = 0$$

$$x_i = e^{-y}$$

$$f_Y(y) = 1 \cdot \left| \left| \frac{1}{\frac{1}{x}} \right| \right|_{x = x_i} = x_i = \begin{cases} e^{-y} & y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösung Zusatzaufgabe

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \qquad X_1, X_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\|\underline{X}\|^2 = X_1^2 + X_2^2$$

1. Berechnung von $Y_1 = X_1^2 = g(X_1) \in [0; +\infty)$

$$\frac{dg(x)}{dx} = 2x \qquad y - g(x_i) \overset{!}{=} 0$$

$$y - x_i^2 = 0 \iff \begin{aligned} x_1 &= +\sqrt{y} \\ x_2 &= -\sqrt{y} \end{aligned}$$

$$f_{Y_1}(y_1) = \sum_{x_i} f_X(x_i) \left(\left| \frac{dg(x)}{dx} \right| \Big|_{x=x_i} \right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \left| \frac{1}{-2\sqrt{y}} \right| =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}} & y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

↳ Herleitung für Y_2 erfolgt analog.

2. $f_{\|X\|^2}(r) = \left(f_{Y_1} * f_{Y_2}\right)(r)$ [vgl. Hinweis]

$$f_{\|x\|^2}(r) = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{\tau}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(r-\tau)}} e^{-\frac{r-\tau}{2}} d\tau =$$

$$= \int_0^r \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau(r-\tau)}} e^{-\frac{r}{2}} d\tau = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r}{2}} \int_0^r \frac{1}{\sqrt{\tau(r-\tau)}} d\tau = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{r}{2}} & r \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der hier berechnete Spezialfall ist die χ^2 (Chi-Squqre) Verteilung mit $n=2$ Freiheitsgraden. Mehr dazu nächstes Mal!