Stochastische Signale, 19.11.2013

Notiztitel 19.11.2013

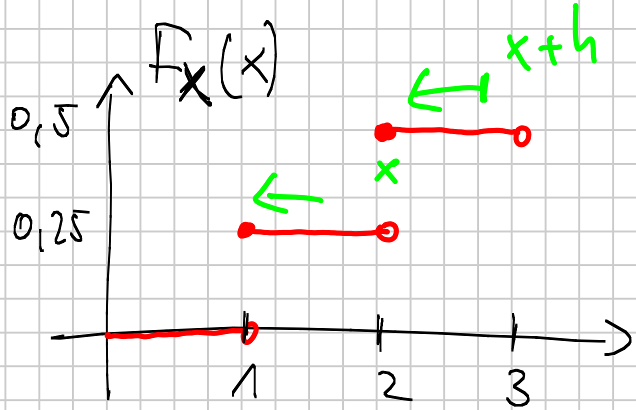
Wiederholung: Zufallsvariabeln → diskrete ZV, → stetige ZV

tatsächlich Funktion: $\Omega \to \Omega'$

Warum rechtsseitige Stetigkeit

$$\lim_{h \to 0} F(x+h) = F(x)$$

$$p_X(x) = \begin{cases} 0{,}25 & x=1 \\ 0{,}25 & x=2 \\ 0{,}5 & x=3 \end{cases}$$



Mehrdimensionale Verteilungen

$\to$ Betrachte Vektoren von ZV $\quad \underline{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ beliebige ZV

$\to$ Charakterisierung durch die CDF

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

$$= P(\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_n \le x_n\})$$

$$F_X(x) = P(\{X \le x\})$$

$$\underset{X \text{ diskret}}{=} \sum_{\xi \le x} p_X(\xi)$$

$$\underset{X \text{ stetig}}{=} \int_{\xi \le x} f_X(\xi)\, d\xi$$

$\underline{X}$ diskret

$$= \sum_{\xi_1 \leq x_1} \sum_{\xi_2 \leq x_2} \dots \sum_{\xi_n \leq x_n} p_{X_1, X_2, \dots, X_n}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

$\underline{X}$ stetig

$$= \int_{\xi_1 \leq x_1} \int_{\xi_2 \leq x_2} \dots \int_{\xi_n \leq x_n} f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \, d\xi_1 \, d\xi_2 \dots d\xi_n$$

Marginalisierung: $f_{X,Y}(x,y) \to f_X(x)$? $\to f_Y(y)$?

→ Elimination der anderen Komponente

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy$$

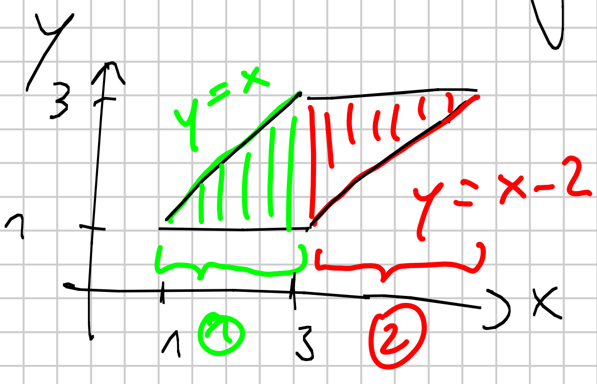
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx$$

→ Analog für den diskreten Fall : $p_{X,Y}(x,y) \nearrow p_X(x)$, $\searrow p_Y(y)$

$$p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y)$$

$$p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x,y)$$

Ausblick: Notwendigkeit einer geeigneten Flächenparametrisierung



$f_{X,Y}(x,y) = c$

ges: $f_X(x)$

$f_Y(y)$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

1 $x \in [1;3]$: $1 \leq y \leq x$

$x \in [3;5]$: $x-2 \leq y \leq 3$

$$= \begin{cases} \int_1^x c\,dy & x \in [0;3] \\ \int_{x-2}^3 c\,dy & x \in [3;5] \end{cases}$$

Stochastische Unabhängigkeit

Wir erinnern uns: A, B stoch. unabh. $\Longleftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Ähnliches gilt für ZV X, Y (sowohl diskret / stetig):

X, Y stoch. unabh. $\Longleftrightarrow$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

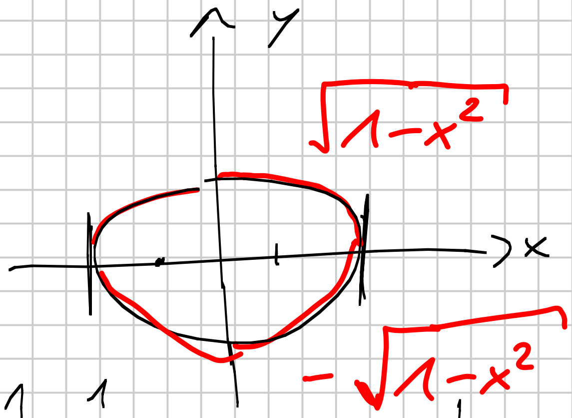
$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

Quiz 4

Aufgabe 1

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & x^2+y^2 \le 1 \\ 0 & \end{cases}$$



a) ges: $f_X(x)$, $f_Y(y)$

Lös: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$

→ Wie parametrisiere ich die Kreisfläche?

$$-1 \le x \le 1$$

$$-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_{X,Y}(x,y) \overset{!}{=} 1$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot \underbrace{A_{Kreis}}_{r^2\pi} \overset{!}{=} 1$$

$$f_X(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\, dy = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \sqrt{1-x^2}$$

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2}$$

Aufgabe 2

X, Y stochastisch unabh.?

$$f_{X,Y}(x,y) \stackrel{?}{=} f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$$\frac{1}{\pi} \neq \frac{4}{\pi^2} \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$$

$\Bigg\}$ stochastisch abhängig

Aufgabe 3

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1/\pi}{\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}$$

$$\forall \; -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$

Aufgabe 4

$$f_{A,B}(a,b) = \frac{b}{2}\, e^{-ab} \left(\delta(b-1) + \delta(b-2) \right)$$

Marginalisierung:

$$f_A(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{A,B}(a,b)\,db = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{b}{2} e^{-ab}}_{:= g(b)} \left(\delta(b-1) + \delta(b-2)\right) db =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(1)\,\delta(b-1) + g(2)\,\delta(b-2)\,db =$$

$$= g(1) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(b-1)\,db + g(2) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(b-2)\,dt$$

$$= g(1) + g(2) = \frac{1}{2} e^{-a} + e^{-2a} \qquad \forall a \in \mathbb{R}^+$$

$\Rightarrow$ A ist eine reelle ZV

$$f_B(b) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{A,B}(a,b)\,da = \int_{(-\infty)\,0}^{\infty} \frac{b}{2} e^{-ab}\left(\delta(b-1)+\delta(b-2)\right) da =$$

$$= \frac{b}{2}\left(\delta(b-1)+\delta(b-2)\right) \int_{(-\infty)\,0}^{\infty} e^{-ab}\, da =$$

$$= \frac{b}{2}\left(\delta(b-1)+\delta(b-2)\right) \left[-\frac{1}{b} e^{-ab}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{b}{2}\left(\delta(b-1)+\delta(b-2)\right) \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{2}\left[\delta(b-1)+\delta(b-2)\right]$$

$\Rightarrow$ B ist diskret