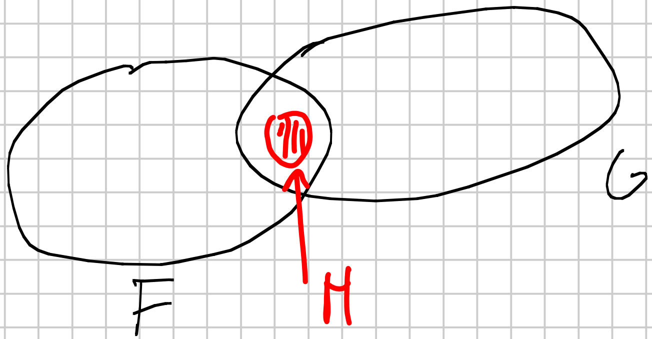
# Stochastische Signale, 12.11.2013

Notiztitel 12.11.2013

Wiederholung:

$P(F \cap G \mid H) = 1 \quad \Rightarrow$




$\Rightarrow H \subseteq F \cap G$

b) $P(F \cap G \mid H) = \dfrac{P(F \cap G \cap H)}{P(H)} \overset{!}{=} 1$

$P(F \cap G \cap H) = P(H) \quad \Rightarrow$ Aussage richtig

a) Zu zeigen: $P(F \cap G) \stackrel{?}{=} 1$ $(*)$

Es ist $F \cap G \subseteq F \cap G \cap H$. Dadurch folgt $P(F \cap G) \leq P(F \cap G \cap H) = P(H)$.

Da jedoch $P(H) \leq 1$, folgt $P(F \cap G) \leq 1$, wobei die Gleichheit nur im Falle $H = \Omega$ gegeben wäre.

c) $P(F^c \mid H) \stackrel{?}{=} 0$

$$P(F^c \mid H) = \frac{P(F^c \cap H)}{P(H)} = \frac{0}{P(H)} = \underline{\underline{0}}$$

Wir sehen durch a): $M \subseteq F \cap G$

$\Rightarrow M \subseteq F$

$M \subseteq G$

$F^c \cap H = \emptyset$

d) $H = \Omega$

$P(H) = 1 \Rightarrow$ i.A. nicht gegeben, da $P(F \cap G \mid H) = 1$

# Einführung Zufallsvariabeln

$\hat{=}$ Funktionen von $\Omega \to \Omega'$

Bsp: Würfel $\quad \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\Omega' = \{0, 1\}$

ungerade $\quad$ gerade Zahlen

$$\omega \in \Omega : X(\omega) = \begin{cases} 0 & \forall \omega \text{ ungerade} \\ 1 & \forall \omega \text{ gerade} \end{cases}$$

ZV

→ diskrete: $\Omega'$ ist abzählbar & endlich ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$)

→ stetige/kontinuierliche: $\Omega$ ist nicht abzählbar

CDF: Kumulierte Verteilungsfunktion $\quad X \quad y = f(x)$

$$F_X(x) = P(\{X \le x\})$$

ZV $\quad$ Realisierung

Eigenschaften:

- $F_X(x) \in [0,1] \quad \forall x$
- monoton wachsend

$$x_1 \le x_2$$

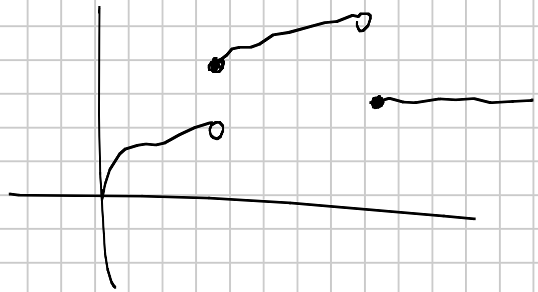
$$\{X \le x_1\} \subseteq \{X \le x_2\}$$

$$\Rightarrow P(\{X \le x_1\}) \le P(\{X \le x_2\})$$

- $\lim_{x \to -\infty} F_{\underline{X}}(x) = 0$

  $\lim_{x \to \infty} F_{\underline{X}}(x) = 1$

- rechtseitig stetig



Diskrete ZV:

Zähldichte
(PMF)
prob. mass fct.

$p_{\underline{X}}(x) = P(\{\underline{X} = x\})$

Stetige ZV:

W'keit dichte
(PDF)
prob. density fct.

$$F_{\underline{X}}(x) = \sum_{\substack{\xi \leq x \\ \xi \in \Omega'}} p_X(\xi)$$

$$= P(\{\underline{X} \leq x\})$$

$$F_{\underline{X}}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\xi)\, d\xi$$

$f_X(x)$ : <u>Dichte</u>

$$f_X(x) = \frac{d F_X(x)}{dx}$$

<u>Quiz</u>

<u>Aufgabe 1</u>:

$$f_X(x) = \frac{d F_X(x)}{dx}$$

$$\frac{d F_X(x)}{dx} \geq 0$$

, da $F_X(x)$ nach Definition monoton wachsend ist

Aufgabe 2: $f_Y(y)$ : Dichte $\in \mathbb{R}_0^+$ $\frac{d}{dy} F_Y(y)$

$p_{\cancel{X}}(x)$ : PMF $\in [0,1]$

$\Rightarrow$ besitzen also i.A. nicht den gleichen Wertebereich

Aufgabe 3: Wir erinnern uns aus Gesetz der tot. Wkeit:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) =$$

$$= P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot P(B^c)$$

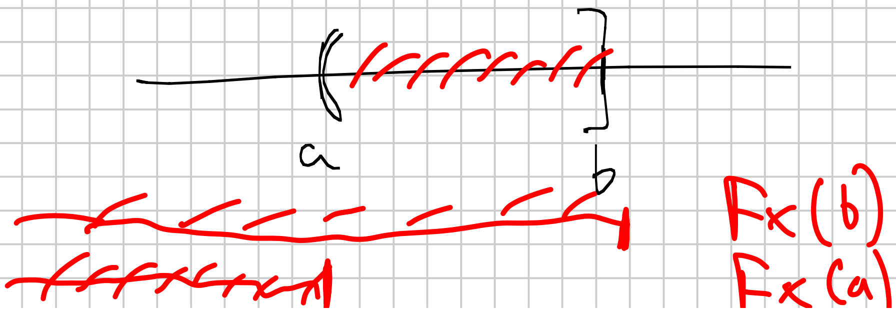
$$\overset{B = \{X \le x\}}{=} P(A \mid \{X \le x\}) \cdot P(\{X \le x\}) + P(A \mid \{X > x\}) \cdot P(\{X > x\})$$

$$= P(A \mid \{X \le x\}) \cdot F_X(x) + P(A \mid \{X > x\}) \cdot (1 - F_X(x))$$

## Aufgabe 4:

$$\frac{d}{db} P(\{a < X \le b\}) = \frac{d}{db}\left(F_X(b) - F_X(a)\right)$$

$$= f_X(b) - 0 = f_X(b)$$



$$\frac{d}{db} P(\{b < X \le c\}) = \frac{d}{db}\left(F_X(c) - F_X(b)\right) = -f_X(b)$$

<u>Zusatzaufgaben:</u>

a) $$p_X(x) = \begin{cases} c\left(\frac{1}{2}\right)^x & x \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\sum_{x \in \mathbb{N}^0} p_X(x) \overset{!}{=} 1 \iff \sum_{i=0}^{\infty} c\left(\frac{1}{2}\right)^i \overset{!}{=} 1$$

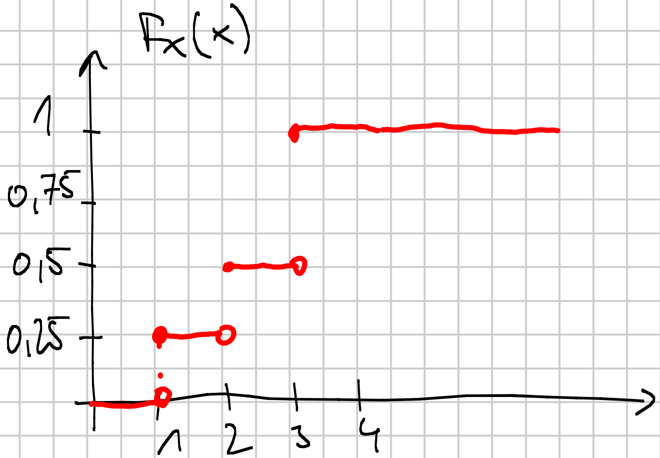
$$c \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1$$

$$c \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

$$c \cdot 2 = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 2




a) $P(\{X<1\}) = 0$

b) $P(\{X\leq 1\}) = 0{,}25$

c) $P(\{X>2\}) = 1 - P(\{X\leq 2\} = 0{,}5$

d) $P(\{X\geq 1\}) = 1 - P(\{X<1\}) = 1$

e) $P(\{X=1\}) = 0{,}25$

f) $P(\{X=3\}) = P(\{X \leq 3\}) - P(\{X \leq 2\})$
$= 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

g) $$p_X(x) = \begin{cases} 0{,}25 & x = 1 \\ 0{,}25 & x = 2 \\ 0{,}5 & x = 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$