Stochastische Signale – Mentorübung – 5.11.2012

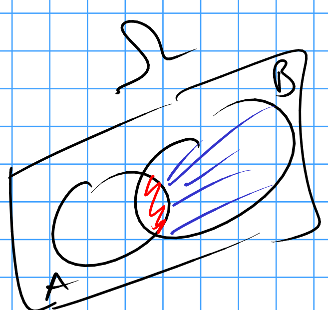
Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

Zentrale Fragestellung: Was kann das Eintreten oder Nichteintreten eines Ereignisses B über ein anderes Ereignis A aussagen?

$$A, B \subset \Omega \quad , \quad P(B) > 0$$

Notation: $$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B)$$

$$P(A|B) + P(A^c|B) \overset{!}{=} 1$$

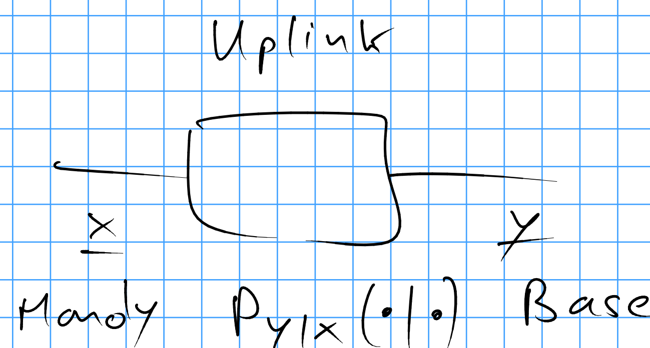


$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B) + P(A^c \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

Anwendungen:

NT



Stochastische Unabhängigkeit

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$A_i \subset \mathbb{F} \quad i \in I = \{1, \dots, N\}, \; J \subset I$

Indexmenge

$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i)$$

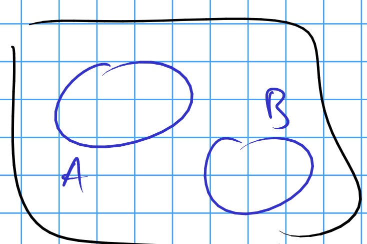
$$\underline{\underline{\forall J}}$$

Erklärung: $A, B, C \rightarrow I = \{1, 2, 3\}$

A, B, C sind unabhängig falls

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

$$\left.\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) \\ P(B \cap C) &= P(B) \cdot P(C) \\ P(A \cap C) &= P(A) \cdot P(C) \end{aligned}\right\} \text{paarweise Unabhängig}$$



$$A \cap B = \emptyset$$

Aus dem Wissen darüber, dass eines der beiden Ereignisse eingetreten ist, lässt sich schließen, dass das Andere nicht eingetreten sein kann!

Also: A u. B. sind im disjunkten Fall immer abhängig.

z.B. Würfel: $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$

$A = \{1, 3, 6\}$ $\quad P(A) = \frac{1}{2}$

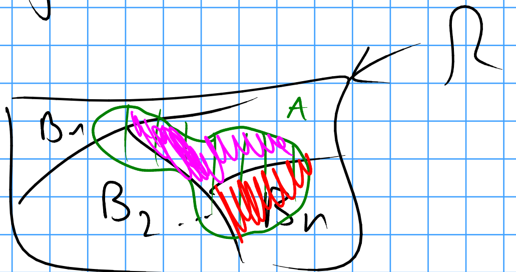
$B = \{3, 4\}$ $\quad P(B) = \frac{1}{3}$

Frage: A stochastisch unabhängig von B?

$$P(A \cap B) = P(\{1,3,6\} \cap \{3,4\}) = P(\{3\}) = \frac{1}{6}$$

$$= P(A) \cdot P(B) \quad \Rightarrow \text{stochastisch unabhängig}$$

Gesetz d. totalen Wahrscheinlichkeit



$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$$

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall\, i \neq j$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{P(A \cap B_i)}{P(B_i)} \, P(B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i)$$

Gesetz Bayes

Bedingungen vertauschen

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Anwendung: Bayes Filter

Ereignisse: "Spam"

"Wort ist indexiert"

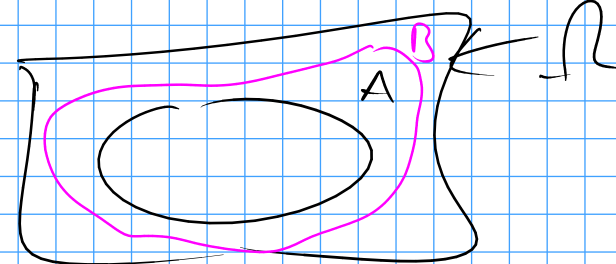
Lernvorgang

$$P(\text{Spam} \mid \text{Indexed Word}) = \frac{P(\text{Spam}) \cdot P(\text{Indexed Word} \mid \text{Spam})}{P(\text{Indexed Word})}$$

Quiz

Aufgabe 1

$\boxed{A \subset B}$, $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{3}$



$$P(B \mid A) = 1 = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = \underline{\underline{1}}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

Aufgaben 2

A: Urne A gewählt

A^c: -"- B gewählt

W: weiße Kugel

W^c: schwarze Kugel

$P(A) = 0{,}5$

$P(W^c \mid A) = 0{,}99$ $\qquad$ $P(W \mid A^c) = 0{,}99$

$P(W \mid A) = 0{,}01$ $\qquad$ $P(W^c \mid A^c) = 0{,}01$

ges.: $P(A \mid W^c)$

$$P(A \mid W^c) = \frac{P(A \overset{?}{\cap} W^c)}{P(W^c)} \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{P(W^c \mid A) \cdot P(A)}{P(W^c)} =$$

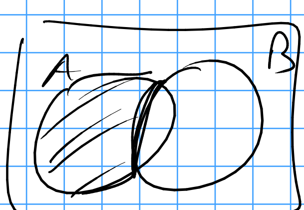
$$= \frac{P(W^c \mid A) \cdot P(A)}{\underbrace{P(W^c \mid A) \cdot P(A) + P(W^c \mid A^c) \cdot P(A^c)}_{\text{Gesetz d. tot. Wkeit}}}$$

$$= \underline{\underline{0{,}99}}$$

Aufgabe 3

Beh: $P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c)$, falls

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$



$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) =$$

$$= P(A) - P(A) \cdot P(B) =$$

$$= P(A) \cdot [1 - P(B)] = \underline{\underline{P(A) \cdot P(B^c)}}$$

Aufgabe 4

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = P(A)^2 \quad [P(A) = P(B)]$

$P(A \cup B) = \frac{3}{2} P(A)$

zu zeigen: $P(A) = \frac{1}{2}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$
$$= 2P(A) - P(A)^2 = \frac{3}{2} P(A) \qquad | : P(A) \neq 0$$
$$2 - P(A) - \frac{3}{2} = 0$$
$$\boxed{P(A) = 0{,}5}$$

Zusatzaufgaben

geg:

A, B, C unabhängig

Beh: $P(A \cap (B \cup C)) = P(A) \cdot P(B \cup C)$

$$P(A \cap (B \cup C)) = P((A \cap B) \cup (A \cap C)) =$$
$$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - \underbrace{P(A \cap B \cap A \cap C)}_{!}$$
$$\overset{\text{unab.!}}{=} P(A) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(C) - P(A) \cdot \underbrace{P(B) \cdot P(C)}$$
$$= P(A) \cdot [P(B) + P(C) - P(B \cap C)]$$
$$= P(A) \cdot P(B \cup C)$$

paarweise unabh. genügt nicht