Stochastische Signale, Mentorübung 4/2/2014

LTI-Systeme: (Linear Time Invariant)

$$X_t \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow Y_t$$

$h(t)$: deterministische Kanalimpulsantwort

stochastische Prozesse:
- $\mu_X(t)$
- $r_X(s,t)$
- $c_X(s,t)$

$$\mu_Y(t) = E[Y_t] = E[X_t * h(t)] =$$
$$= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} X_\tau \, h(t-\tau)\, d\tau\right] =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{E[X_\tau]}_{\mu_X(\tau)} h(t-\tau)\, d\tau = \mu_X(t) * h(t)$$

$$r_{Y,X}(s,t) = E[Y_s X_t] = E[(X_s * h(s)) X_t] =$$
$$= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} X_{s'} \cdot h(s-s')\, ds' \, X_t\right] =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{E[X_{s'} X_t]}_{r_X(s',t)} h(s-s')\, ds' = r_X(s,t) *_s h(s)$$

$$r_{X,Y}(s,t) = E[X_s Y_t] = E[X_s (h(t) * X_t)] =$$

$$= E\left[X_s \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t') X_{t'} \, dt'\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} E[X_s X_{t'}] \, h(t-t') \, dt' = r_X(s,t) *_t h(t)$$

$$r_Y(s,t) = E[Y_s Y_t] = E[(h(s) * X_s) Y_t] =$$

$$= h(s) *_s r_{XY}(s,t) = h(s) *_s h(t) *_t r_X(s,t)$$

<u>Situation für WSS:</u>

$$r_{Y,X}(s,t) \hat{=} r_{Y,X}(s-t) = r_{Y,X}(\tau)$$

$$\vdots$$

$$= r_X(\tau) * h(\tau)$$

$$r_{X,Y}(\tau) = r_X(\tau) * h(-\tau) = r_X(\tau) * \tilde{h}(\tau)$$

Leistungsdichtespektren

$$r_X(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\; S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_X(\tau) \, e^{-j2\pi f\tau} \, d\tau$$

$$r_{X,Y}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\; S_{X,Y}(f)$$

$$r_{Y,X}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\; S_{Y,X}(f)$$

Ebenso: $r_{X,Y}(-\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \; S_{X,Y}(f)^*$

Eigenschaften: $r_X(\tau)$ → reell

→ symmetrisch

$r_X(\tau) = r_X(-\tau)$

↳ $S_X(f)$ ist rein reell, ≥ 0!

$$S_{Y,X}(f) \bullet\!\!-\!\!\circ \; r_{Y,X}(\tau) = \underbrace{h(\tau) * r_X(\tau)}_{\circ\!\!-\!\!\bullet \; \boxed{H(f) \cdot S_X(f)}}$$

$$S_{X,Y}(f) \bullet\!\!-\!\!\circ \; r_{X,Y}(\tau) = \underbrace{r_X(\tau) * \tilde{h}(\tau)}_{\circ\!\!-\!\!\bullet \; \boxed{H(f)^* \cdot S_X(f)}} \quad \tilde{h}(\tau) = h(-\tau)$$

$$S_Y(f) \circ\!\!-\!\!\circ \; r_Y(\tau) = \underbrace{r_X(\tau) * h(\tau) * \tilde{h}(\tau)}_{\circ\!\!-\!\!\bullet \; \boxed{\underbrace{H(f)^* \cdot H(f)}_{} \cdot S_X(f) = |H(f)|^2 \cdot S_X(f)}}$$

Quiz Aufgabe 1

Annahme: X_t WSS

$$r_X(\tau) = E[X_{t+\tau} X_t] \underset{t'=t+\tau}{=} E[X_{t'} X_{t'-\tau}] = E[X_{t'-\tau} X_{t'}] \overset{WSS}{=} r_X(-\tau) \quad \checkmark$$

Aufgabe 2

X_t: WSS

zu zeigen: $r_X(0) = \sigma_X^2 + \mu_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\, df$

$$r_X(0) = E[X_{t+0} X_t] = E[X_t^2] + \mu_X(t)^2$$

$$\sigma_X^2(t) = E[X_t^2] - \mu_X(t)^2$$

$$r_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) \underbrace{e^{j2\pi f\tau}}_{=1} df$$

$$= \Big|_{\tau=0} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\, df$$

Aufgabe 3

$\rightarrow$ Ja! siehe vorherige Herleitung (Einführung)

Aufgabe 4

geg: $S_Y(f)$, $S_X(f)$

ges: $H(f)$

$$S_Y(f) = \underbrace{|H(f)|^2}\cdot S_X(f)$$

$$|H(f)|^2 = \frac{S_Y(f)}{S_X(f)}$$

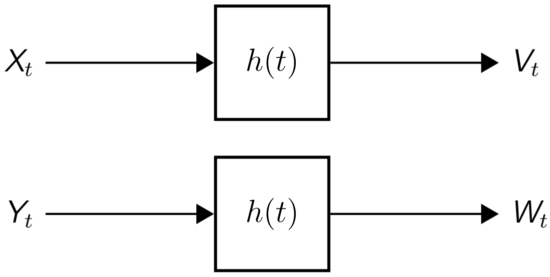
$$H(f) = |H(f)| \cdot \underbrace{e^{j \arg H(f)}}_{\text{nicht vorhanden}}$$

Aufgabe 4 Filterung von Zufallsprozessen (12 Punkte)

Gegeben seien zwei gemeinsam im weiteren Sinne stationäre reelle Zufallsprozesse $(X_t : t \in \mathbb{R})$ und $(Y_t : t \in \mathbb{R})$ mit der Kreuzkorrelationsfunktion

$$r_{X,Y}(s,t) = r_{X,Y}(s-t) = r_{X,Y}(\tau).$$

Die beiden Prozesse werden nun mit zwei baugleichen LTI-Systemen mit der Impulsantwort $h(t)$ gefiltert, wodurch sich die Prozesse $(V_t : t \in \mathbb{R})$ und $(W_t : t \in \mathbb{R})$ ergeben. Die Anordnung lässt sich wie folgt darstellen:



a)* Geben Sie das Leistungsdichtespektrum $S_V(f)$ in Abhängigkeit des Leistungsdichtespektrums $S_X(f)$ und der Übertragungsfunktion $H(f)$ ●—○ $h(t)$ an.

$$S_V(f) = |H(f)|^2 \cdot S_X(f)$$

b)* Berechnen Sie $r_{V,Y}(s,t)$ in Abhängigkeit von $r_{X,Y}(\tau)$ und $h(t)$ und schreiben Sie das Ergebnis als Integral.
Hinweis: Verwenden Sie $V_s = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) X_{s-u} \mathrm{d}u$.

$E[h(s) * X_s Y_t] = h(s) * E[X_s Y_t]$

$$r_{V,Y}(s,t) = E[V_s Y_t] = E[(X_s * h(s)) Y_t] =$$

$$= h(s) * E[X_s Y_t] = h(s) * r_{XY}(s,t)$$

$$E[V_s Y_t] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u) X_{s-u} \, du \, Y_t\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \, r_{X,Y}(s-u,t) \, du$$

Die Kreuzkorrelationsfunktion von $(V_t : t \in \mathbb{R})$ und $(W_t : t \in \mathbb{R})$ ergibt sich zu

$$r_{V,W}(\tau) = (\tilde{h} * h * r_{X,Y})(\tau),$$

wobei $\tilde{h}(t) = h(-t)$.

c)* Bestimmen Sie das Kreuzleistungsdichtespektrum $S_{V,W}(f)$ in Abhängigkeit des Kreuzleistungsdichtespektrums $S_{X,Y}(f)$ und der Übertragungsfunktion $H(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\, h(t)$.

$$S_{V,W}(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\, r_{V,W}(\tau) = \underbrace{(\tilde{h} * h * r_{X,Y})(\tau)}$$

$$= \underbrace{|H(f)|^2 \cdot S_{X,Y}(f)}$$

Nun werde der Prozess $(D_t : t \in \mathbb{R})$ mit $D_t = V_t - W_t$ betrachtet.

d)* Bestimmen Sie die Autokorrelationsfunktion $r_D(\tau) = \mathrm{E}[D_t D_{t-\tau}]$ in Abhängigkeit von $r_V(\tau)$, $r_W(\tau)$ und $r_{V,W}(\tau)$.

$$r_D(\tau) = E[D_t D_{t-\tau}] = E[(V_t - W_t)(V_{t-\tau} - W_{t-\tau})] =$$

$$= E[V_t V_{t-\tau} - V_{t-\tau} W_{t-\tau} - W_t V_{t-\tau} + W_t W_{t-\tau}] =$$

$$= r_V(\tau) - r_{VW}(\tau) - r_{W,V}(\tau) + r_W(\tau) =$$

$$= r_V(\tau) - r_{VW}(\tau) - r_{V,W}(-\tau) + r_W(\tau)$$

e) Geben Sie nun das Leistungsdichtespektrum $S_D(f)$ in Abhängigkeit von $S_X(f)$, $S_Y(f)$ und $S_{X,Y}(f)$ an.

$$S_D(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\, r_D(\tau)$$

✓ ✓

$$S_D(f) = S_V(f) - S_{VW}(f) - S_{VW}(f)^* + S_W(f)$$

$$= |H(f)|^2 \left(S_X(f) + S_Y(f) - S_{X,Y}(f) - S_{X,Y}(f)^*\right)$$

$$= |H(f)|^2 \left(S_X(f) + S_Y(f) - 2\,\mathrm{Re}(S_{X,Y}(f))\right)$$