Stochastische Signale, 28/01/2013

Zufallsprozesse:

- Zufallsfolgen: $X_n : n \in \mathbb{N}$

→ Verbundzähldichte als Charakterisierung $p_{X_1 X_2, \dots, X_k}$

→ Mittelwerte: Momente

$\mu_X(n), \sigma_X(n), r_X(k,l), c_X(k,l)$

$k, l \in \mathbb{N}$

- Zufallsprozesse: $X_t : t \in \mathbb{R}$

→ Charakterisierung durch Dichten kaum möglich

→ Übergang auf Momente, d.h. "Durchschnittsgrößen"

$\mu_X(t), \sigma_X(t), r_X(s,t), c_X(s,t)$

$s, t \in \mathbb{R}$

Zwei Beispiele:

1. Poisson-Prozess: Zählprozess mit exponentiellen Wartezeiten

$$N_t = \sum_{i=1}^{\infty} u(t - T_i) \qquad u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$T_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$$

- $X_j \sim Expo(\lambda)$

$$\left[f_{X_j}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \right] \quad x \geq 0$$

- X_j iid

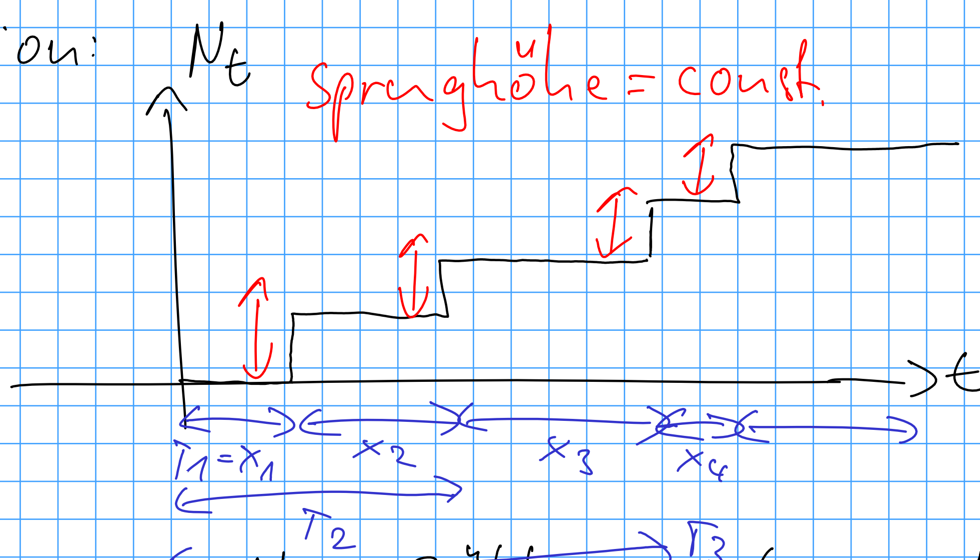
$T_i \sim (\lambda, i)$ gammaverteilt

$$f_{T_i}(t) = \frac{\lambda^i}{(i-1)!} t^{i-1} e^{-\lambda t} \qquad t \geq 0$$

$$\Rightarrow P(\{N_t = n\}) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

(Poisson-Verteilt : λt)

Musterfunktion:



Eigenschaften:

- N_t Zählprozess (monoton steigend)
- N_t hat unabhängige Inkremente

$P(N_0 = 0) = \underline{1}$

$(N_{t_3} - N_{t_2})$ stochastisch unabh. von $(N_{t_1} - N_{t_0})$

- $N_t - N_s \sim$ Poisson-verteilt $\lambda(t-s)$
- $\mu_N(t) = \lambda t$

  $r_N(s,t) = \lambda \min\{s,t\} + \lambda^2 st$

Exkurs: $\boxed{0 \le t \le s}$ $r_N(s,t) = E[N_s N_t] =$

$$= E[(N_s - N_t + N_t - N_0)(N_t - N_0)] =$$

$$= E[(N_s - N_t)(N_t - N_0) + (N_t - N_0)^2]$$

$$= E[(N_s - N_t)]\, E[(N_t - N_0)] + \underbrace{E[(N_t - N_0)^2]} =$$

$$= \lambda(s-t)\lambda t + \lambda t + (\lambda t)^2$$

$$= \lambda^2 st - \lambda^2 t^2 + \lambda t + (\lambda t)^2$$

$$= \lambda(\lambda st + t)$$

$Var[N_t] = E[N_t^2] - E[N_t]^2$

$E[N_t^2] = Var[N_t] + E[N_t]^2$

2. Wiener Prozess

$$W_t = \sum_{i=1}^{n} X_i\, u(t - iT)$$

$X_i \sim Bern(p)$

$P(\{X_i = \delta\}) = p$

$P(\{X_i = -\delta\}) = 1 - p$

Auffassung als abgetasteter Random-Walk

Random Walk $W_n : n \in \mathbb{N}$ (Folge!) $p = \frac{1}{2}$

$$E[W_t]\Big|_{t=nT} = E[W_n] = 0$$

$$Var[W_t]\Big|_{t=nT} = Var[W_n] = n\delta^2$$

$$T \to 0 \qquad n = \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor \to \infty$$

Herleitung s. Skript: Idee: Summe unendl. vieler iid. ZV

$$\to \quad W_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$$

Eigenschaften:

- $P(\{W_0 = 0\}) = 1$
- W_t unabhängige Inkrement (vgl. Poisson-Prozess)
- $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 (t-s))$
- $\mu_W(s) = 0$

  $r_W(s,t) = \sigma^2 \min(s,t)$

http://www.cims.nyu.edu/~eve2/chap4.pd

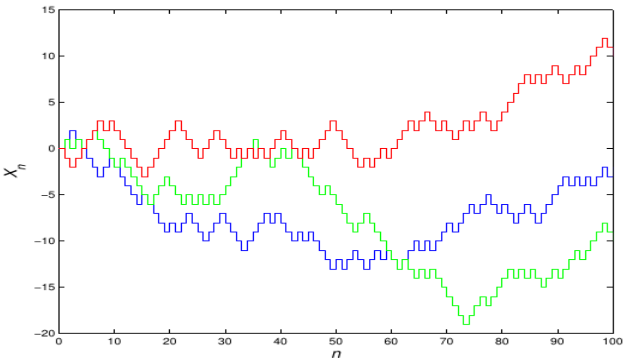


Figure 4.1: Three realizations of the (unrescaled) random walk S_n for $n \in [0, 100]$.

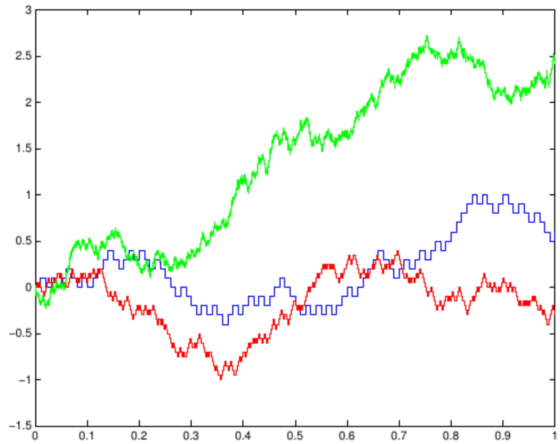


Figure 4.2: Realizations of W_t^N for $N = 100$ (blue), $N = 400$ (red), and $N = 10000$ (green).

Quiz

Aufgabe 1: Frage: Warum sind $S_{t_2} - S_{t_1}$ von S_{t_1} stoch. unabhängig?

$n_2 = \lfloor \frac{t_2}{T} \rfloor \qquad n_1 = \lfloor \frac{t_1}{T} \rfloor$

Random walk $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$S_{n_2} - S_{n_1} = \sum_{i=1}^{n_2} X_i - \sum_{i=1}^{n_1} X_i \overset{n_1 < n_2}{=} \quad =$$

$$= \sum_{i=n_1+1}^{n_2} X_i$$

$$S_{n_1} = \sum_{i=1}^{n_1} X_i$$

beide Summen teilen sich keine gemeinsamen Indizes + X_i und X_j für $i \neq j$ unabh. $\Rightarrow$ also auch

$S_{n_2} - S_{n_1}$ u. S_{n_1}

Aufgabe 2: Idee: $\Rightarrow S_t$ als Summe von unendlich vielen X_i mit X_i iid.

$\Rightarrow$ zentraler Grenzwertsatz: jene ist normalverteilt

Aufgabe 3: Poisson-Prozess ist ein Zählprozess $N_t = \sum_{i=1}^{\infty} u(t - T_i)$ und damit monoton steigend, d.h. es gilt stets $S_{t_2} - S_{t_1} \geq 0$ für $t_2 > t_1$.

Aufgabe 4: siehe Einführung.

Aufgabe 3 **Poisson-Prozess** (12 Punkte)

Der Zufallsprozess s_t repräsentiere die Gesamtzahl aller e-Mails, die zum Zeitpunkt t auf einem Mailserver gespeichert werden. Dabei sei s_t ein Poisson-Prozess mit Parameter $\lambda > 0$.

a)* Welchen Wert nimmt der Prozess s_t für $t < 0$ an?

S_t ist ein Zählprozess, daher

$S_t = 0 \quad \forall t < 0$

b)* Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass zum Zeitpunkt $t \geq 0$ keine e-Mail auf dem Server gespeichert ist.

$P(\{S_t = s\}) = \frac{(\lambda t)^s}{s!} e^{-\lambda t}$ | $P(\{S_t = 0\}) = e^{-\lambda t}$

c) Wie lautet der Erwartungswert $\mathrm{E}[s_t]$ für $t \geq 0$?

$E[S_t] = \lambda t$ (Eigenschaft der Poisson-Verteilung mit Parameter λt)

d) Geben Sie mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung eine obere Grenze für die Wahrscheinlichkeit an, dass $\{|s_t - \lambda t| \geq \varepsilon\}, t \geq 0, \varepsilon \geq 0$.
Hinweis: $\mathrm{Var}[s_t] = \lambda t, t \geq 0$.

Tschebyscheff-Ungleichung:

$P(|X-\mu| \geq a) \leq \frac{Var[X]}{a^2}$

(vgl. Herleitung über die Markov-Ungleichung:

$P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$

$P(\{|S_t - \lambda t| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var[S_t]}{\varepsilon^2} = \frac{\lambda t}{\varepsilon^2}$

e) Für welche Werte von ε (abhängig von t) hat diese obere Grenze keine Bedeutung? Begründen Sie Ihre Antwort!
Hinweis: Überlegen Sie, welche Werte eine Wahrscheinlichkeit annehmen kann.

Obere Grenze hat keine Bedeutung, falls diese größer gleich eins ist, also:

$$\frac{\lambda t}{\varepsilon^2} \leq 1 \qquad \varepsilon \geq \sqrt{\lambda t}$$

Da der Speicher des Mailservers nicht unbegrenzt ist, nehmen wir nun an, dass jede e-Mail nach einem Zeitraum T wieder gelöscht wird. Die Gesamtzahl aller e-Mails auf dem Server ist dann durch den Zufallsprozess

$$\tilde{s}_t = s_t - x_t$$

gegeben. Dabei bezeichnet s_t unverändert den Poisson-Prozess mit Parameter λ. Der zweite Zufallsprozess x_t beschreibt die Anzahl der e-Mails, die bis zum Zeitpunkt t wieder gelöscht wurden, weil sie zuvor bereits für einen Zeitraum T auf dem Server lagen. Der Zufallsprozess $\tilde{s}_t$ beschreibt also die Anzahl der e-Mails, welche im Zeitintervall $[t-T, t]$ bei dem Mailserver eingetroffen sind.

f)* Geben Sie x_t in Abhängigkeit des Zufallsprozesses s_t an.

x_t muss also die Anzahl aller Mails darstellen, die mindestens schon für die Zeitraum T vorhanden sind. Zum Zeitpunkt t sind dies: s_{t-T}

g) Wie lautet die Zähldichte der Zufallsvariable $\tilde{s}_t$ zum Zeitpunkt t? Unterscheiden Sie die Bereiche

1) $0 \leq t < T$,

2) $t \geq T$.

Hinweis: Nutzen Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe a).

Fall (1): In diesem Fall existiert noch keine Email, die länger als T liegt, d.h.

$$p_{\tilde{S}_t}(s) = p_{S_t}(s) = \frac{(\lambda t)^s}{s!} e^{-\lambda t}$$

Fall (2): In diesem Fall gilt:

$$\tilde{S}_t = S_t - S_{t-T}$$

Laut den Eigenschaften des Poisson-Prozesses sind die Inkremente $S_{t_1} - S_{t_2}$ Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda(t_1 - t_2)$

Also hier:

$$p_{\tilde{S}_t}(s) = \frac{[\lambda(t-t+T)]^s}{s!} e^{-\lambda T}$$

$$= \frac{(\lambda T)^s}{s!} e^{-\lambda T}$$