Stochastische Signale - Mentorübung 21/01/2014

Bedingte Unabhängigkeit & Markovketten

Unabhängigkeit zweier Ereignisse $\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(A|B) = P(A)$
$P(B|A) = P(B)$

Bedingte Unabhängigkeit:

"A, B sind stochastisch unabh gegeben C"

$$\Leftrightarrow$$

$$P(A \cap B | C) = P(A|C) \cdot P(B|C)$$

$$P(A | B \cap C) = P(A|C)$$

$$P(B | A \cap C) = P(B|C)$$

Für beliebige ZV gilt:

X, Y heißen stochastisch unabhängig gegeben Z

$\Updownarrow$

$$p_{X,Y|Z}(x,y|z) = p_{X|Z}(x|z) \cdot p_{Y|Z}(y|z)$$

$$X \to Z \to Y \quad \Leftrightarrow \quad Y \to Z \to X$$

äquivalent

Markovkette:

Folge $(X_n : n \in \mathbb{N})$ ist eine Markovkette, falls für die Verteilung der Folgenglieder $X_{n_1}, X_{n_2}, \ldots, X_{n_k}$ folgendes gilt:

$$p_{X_{n_k}|X_{n_{k-1}} X_{n_{k-2}} \cdots X_{n_1}}(\cdot|\cdot) = p_{X_{n_k}|X_{n_{k-1}}}(\cdot|\cdot)$$

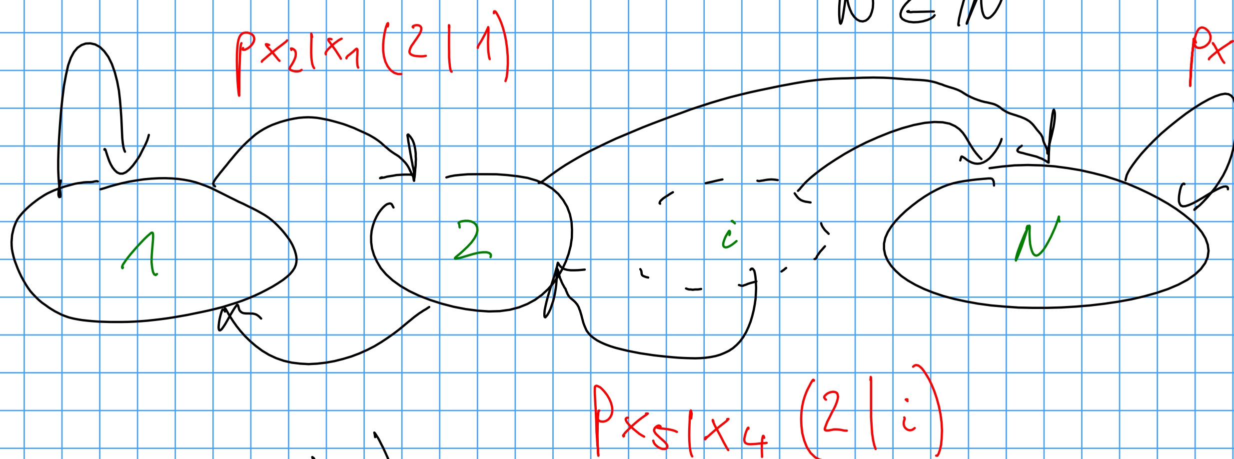
$X_{n_{k-2}} \cdots X_{n_1}$: „Vorgeschichte"

Spezialfall: [homogene / endliche] Markovketten

$$X_n : \Omega \to \mathcal{X} \qquad \mathcal{X} = \{\underset{1}{x_1}, \underset{2}{x_2}, \ldots, \underset{N}{x_N}\}$$

$$N \in \mathbb{N}$$

Bsp.:

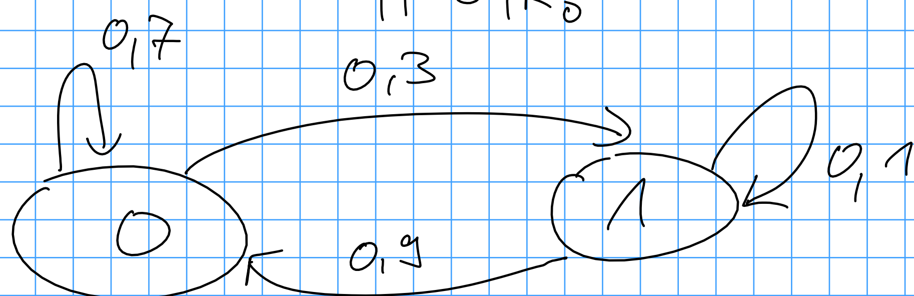


$$\underline{f}_n = \begin{pmatrix} p_{X_n}(x_1) \\ p_{X_n}(x_2) \\ \vdots \\ p_{X_n}(x_N) \end{pmatrix}$$

$$\underline{f}_{n+1} = \underline{\Pi}\, \underline{f}_n \qquad \underline{\Pi}_{ij} = p_{Y|X}(i|j)$$

$$\Pi \in \mathbb{R}_0^{+\,N \times N}$$

Beispiel:



$$\underset{\sim}{\Pi} = \begin{pmatrix} p_{Y|X}(0|0) & p_{Y|X}(0|1) \\ p_{Y|X}(1|0) & p_{Y|X}(1|1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0{,}7 \\ 0{,}3 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0{,}9 \\ 0{,}1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{sum}(\Pi(:,k)) = 1 \quad \forall k$$

$Z : p_Z(z)$ $\qquad \sum_{a \in Z} p_Z(a) = 1$

$$\sum_{z \in Z} p_{Z|X}(z|a) = 1$$

Stationäre Verteilung:

Bisher: $p_{n+1} = \underset{\sim}{\Pi}\, p_n$

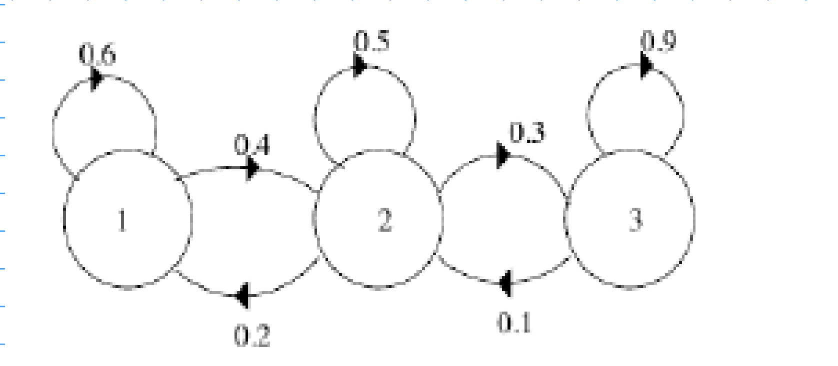
stationär $\hat{=}$ steady state $\qquad p_{n+1} \overset{!}{=} p_n = p$

$$\boxed{\underset{\sim}{\Pi}\, p = p} \rightarrow \boxed{\text{EW-Problem}}$$

$\rightarrow p$ als EV zum EW $\lambda = 1$.

$$\underset{\sim}{\Pi}\, p - p = 0 \iff \boxed{(\Pi - \mathbb{1})\, p = 0}$$

Zusatzaufgabe



1.
$$\underset{\sim}{\Pi} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$
$$\underbrace{\phantom{0{,}6}}_{=1} \quad \underbrace{\phantom{0{,}2}}_{=1} \quad \underbrace{\phantom{0{,}9}}_{=1}$$

2.
$$p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_2 = \begin{pmatrix} p_{x_2}(1) \\ \boxed{p_{x_2}(2)} \\ p_{x_2}(3) \end{pmatrix}$$

$$p_2 = \underset{\sim}{\Pi} \cdot p_1 = \underset{\sim}{\Pi}\left(\underset{\sim}{\Pi} \cdot p_0\right) = \underset{\sim}{\Pi}^2 \cdot p_0$$

$$p_2 = \underset{\sim}{\Pi}^2 \cdot p_0 = \begin{pmatrix} 0{,}44 & 0{,}22 & 0{,}02 \\ 0{,}44 & 0{,}36 & 0{,}14 \\ 0{,}12 & 0{,}42 & 0{,}84 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}44 \\ \boxed{0{,}44} \\ 0{,}12 \end{pmatrix}$$

3.
$$\text{(I)} \quad p_{\infty,1} = 0{,}6\,p_{\infty_1} + 0{,}2\,p_{\infty,2}$$
$$\text{(II)} \quad p_{\infty,2} = 0{,}4\,p_{\infty_1} + 0{,}5\,p_{\infty_2} + 0{,}1\,p_{\infty_3}$$
$$\text{(III)} \quad p_{\infty,3} = 0{,}3\,p_{\infty_2} + 0{,}9\,p_{\infty_3}$$

$(IV)\quad p\infty_1 + p\infty_2 + p\infty_3 = 1$

$(I')\quad 0{,}4\, p\infty_1 = 0{,}2\, p\infty_2$

$(II')\quad 0{,}5\, p\infty_2 = 0{,}4\, p\infty_1 + 0{,}1\, p\infty_3$

$(III')\quad 0{,}1\, p\infty_3 = 0{,}3\, p\infty_2$

$$\left.\begin{aligned} p\infty_3 &= 3\, p\infty_2 \\ p\infty_1 &= 0{,}5\, p\infty_2 \end{aligned}\right\} \text{ in } (IV)$$

$$0{,}5\, p\infty_2 + p\infty_2 + 3\, p\infty_2 = 1$$

$$\boxed{p\infty_2 = \frac{2}{9} \qquad p\infty_1 = \frac{1}{9} \qquad p\infty_3 = \frac{6}{9}}$$

in (II'): ✓

4. Es sei $Y_n = X_n - X_{n-1}$, d.h. $\left\{\begin{array}{l} Y_n = 1 \\ Y_n = 0 \\ Y_n = -1 \end{array}\right.$ letzter Schritt ging nach rechts / links

ges: $\lim\limits_{n \to \infty} \Pr[Y_n = 1]$

Interpretation des Limes $n \to \infty$ als Rechtfertigung für die Annahme, dass die stationäre Verteilung angenommen werden kann.

Alt bekannter Ansatz: Divide & Conquer

$$\Pr[Y_n=1] = \sum_{a\in\{1,2,3\}} \Pr[Y_n=1 \mid X_{n-1}=a]\,\Pr[X_{n-1}=a]$$

$$= \Pr[X_n - X_{n-1} = 1 \mid X_{n-1}=1]\cdot \Pr[X_{n-1}=1]$$

$$+ \Pr[X_n - X_{n-1} = 1 \mid X_{n-1}=2]\cdot \Pr[X_{n-1}=2]$$

$$+ \Pr[X_n - X_{n-1} = 1 \mid X_{n-1}=3]\cdot \Pr[X_{n-1}=3] =$$

← vgl. hier Vorgehen Blatt 9, Zusatzaufgabe SS2012/WAH

$$= \Pr[X_n = 2 \mid X_{n-1}=1]\cdot \Pr[X_{n-1}=1] \quad = p_{\infty,1}$$

$$+ \Pr[X_n = 3 \mid X_{n-1}=2]\cdot \Pr[X_{n-1}=2] \quad = p_{\infty,2}$$

$$+ \Pr[X_n = 4 \mid X_{n-1}=3]\cdot \Pr[X_{n-1}=3] = \quad = p_{\infty,3}$$

hier dürfen wir die Bed. nicht fallenlassen, da X_n und X_{n-1} nicht unabhängig sind

$$= 0{,}4\cdot\frac{1}{9} + 0{,}3\cdot\frac{2}{9} + 0\cdot\frac{6}{9} = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}$$

5. ges: $\Pr[X_n=1 \mid Y_n=1]$

Lös: Es fällt die strukturelle Ähnlichkeit zu den bisher berechneten Ausdrücken auf:

$$\Pr[X_n=1 \mid Y_n=1] = \frac{\Pr[X_n=1, Y_n=1]}{\Pr[Y_n=1]} =$$

$$= \frac{Pr[\tilde{Y}_n = 1 \mid X_n = 1] \cdot Pr[X_n = 1]}{Pr[\tilde{Y}_n = 1]} =$$

$$= \frac{Pr[X_n = 2 \mid X_n = 1] \cdot Pr[X_n = 1]}{Pr[\tilde{Y}_n = 1]} =$$

$$= \frac{0{,}4 \cdot 1/9}{1/9} = 0{,}4$$

Aufgabe 4 **Random Rotation** (11 Punkte)

Sei $(S_n : n \in \mathbb{N})$ ein symmetrischer Random Walk mit Schrittweite $\delta = \frac{2\pi}{3}$ und $S_0 = 0$.

a)* Interpretieren Sie S_n als Winkel und markieren Sie alle möglichen Werte auf dem Einheitskreis in Bild 3. **Hinweis:** $\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$.

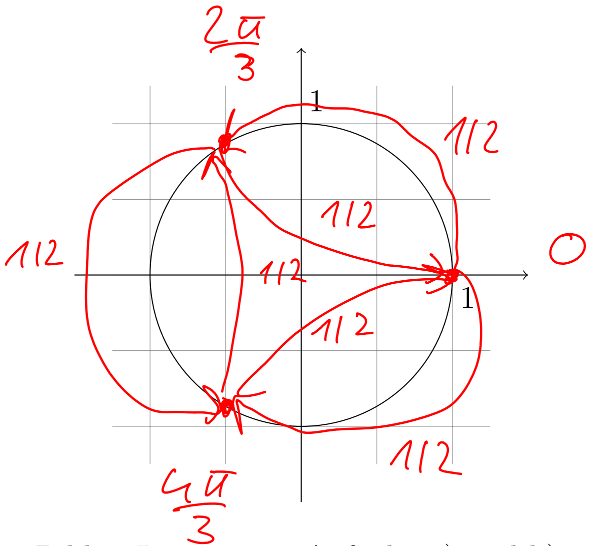


Bild 3: Lösung von Aufgabe a) und b).

Betrachtet man äquivalente Winkel jeweils als einen Zustand, kann die betrachtete Zufallsfolge als Markowkette mit der Übergangsmatrix

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$p_{n+1} = \Pi \cdot p_n$

stat. $p_{n+1} = p_n = p$

angesehen werden.

b) Vervollständigen Sie Bild 3 zum Zustandsübergangsgraphen der Markowkette.

c)* Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{p}_\infty = [\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}]^{\mathrm{T}}$ eine stationäre Verteilung der Markowkette ist.

Bed: $\boxed{p \overset{!}{=} \underset{\sim}{\Pi}\, p}$

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = p$$

$X_1 = \cos(S_1)$

$p_{S_1} = \Pi \, p_{S_0}$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Betrachtet werde nun die Zufallsfolge $(X_n : n \in \mathbb{N})$ mit

$$X_n = \cos(S_n).$$

d)* Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}[X_n]$ für $n = 1$. **Hinweis:** Überlegen Sie, welche Werte X_n in diesem Zeitschritt annehmen kann.

$S_n \in \{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$ $\quad X_n = \cos(S_n)$

$X_n \in \{1, -\frac{1}{2}\} = \mathcal{X}$

$\Rightarrow X_1 = -\frac{1}{2}$

$p_{X_1}(1) = 0$

$p_{X_1}(-\frac{1}{2}) = 1$

$E[X_1] = \sum_{k \in \mathcal{X}} k \, p_{X_1}(k) = 1 \cdot p_{X_1}(1) - \frac{1}{2} \cdot p_{X_1}(-\frac{1}{2})$

$= -1/2$

$\underbrace{p_{S_1}(\tfrac{2\pi}{3}) + p_{S_1}(\tfrac{4\pi}{3})}$

e)* Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}[X_n]$ für große n.

$E[X_n] = \sum_{k \in \mathcal{X}} k \, p_{X_n}(k) = 1 \, p_{X_n}(1) - \frac{1}{2} \, p_{X_n}(-\frac{1}{2})$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{0}}$

$p_{X_n}(1) = p_{S_n}(0) = 1/3$

$p_{X_n}(-\frac{1}{2}) = p_{S_n}(\frac{2\pi}{3}) + p_{S_n}(+\frac{4\pi}{3}) = 2/3$

f) Ist $(X_n : n \in \mathbb{N})$ stationär? Begründen Sie Ihre Antwort.

$\rightarrow$ nicht stationär, da $\mu_X(n) \neq$ const.