Stochastische Signale 14/01/2014

Reele Zufallsfolgen

Reelle Folge: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$a_n = f(n)$$

Folgenglieder: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$

Reelle Zufallsfolge $X_n : \Omega \to \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{N}$

▷ Beschreibung über die CDF: (Folge $X_n, n \in \mathbb{F}$)

$$F_{X_{n_1} X_{n_2} \dots X_{n_k}}(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k})$$

$$= P(\{X_{n_1} \le x_{n_1}\} \cap \{X_{n_2} \le x_{n_2}\} \cap \dots)$$

▷ Beschreibung über Momente

$$\mu_X(k) = E[X_k]$$

$$\sigma_X^2(k) = E[X_k^2] - E[X_k]^2$$

$$r_X(k,l) = E[X_k X_l]$$

$$c_X(k,l) = E[X_k X_l] - E[X_k]\,E[X_l] =$$

$$= r_X(k,l) - \mu_X(k)\,\mu_X(l)$$

Random Walk

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

X_k i.i.d

$$P(\{X_k = \delta\}) = p$$

$$P(\{X_k = -\delta\}) = 1-p$$

$$\mu_S(n) = E[S_n] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

$$E[X_i] = p\delta + (1-p)\cdot(-\delta) = p\delta - \delta + p\delta =$$

$$= 2p\delta - \delta = \delta(2p-1)$$

$$= \sum_{k \in \Omega_X} k\, p_X(k)$$

$$\mu_S(n) = \underline{\underline{n\delta(2p-1)}}$$

i.i.d. identically independently distributed

$$p_{X_k X_\ell} = p_{X_k} \cdot p_{X_\ell}$$

$$\mathrm{Var}[S_n] = \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \overset{X_i \text{ unabh.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i]$$

↳ hier reicht eigentlich unkorreliertheit

$$\mathrm{Var}[X_i] = E[X_i^2] - E[X_i]^2 =$$

$$= \delta^2 p + \delta^2(1-p) - [\delta(2p-1)]^2$$

$$= \delta^2 - \delta^2 (4p^2 - 4p + 1)$$

$$= \delta^2 - 4p^2\delta^2 + 4p\delta^2 - \delta^2$$

$$= \delta^2 4p(1-p)$$

$$Var[S_n] = n\delta^2 4p(1-p)$$

Quiz

Aufgabe 1

$$c_X(k,l) = Cov[X_k, X_l] = E[(X_k - E[X_k])(X_l - E[X_l])]$$

$$= E[X_k X_l] - E[X_k] E[X_l] =$$

$$= r_X(k,l) - \mu_X(k)\mu_X(l)$$

Aufgabe 2

Exkurs: $Var[X] = Cov[X, X]$

$$\Rightarrow \sigma_X^2(k) = Var[X_k] = Cov[X_k, X_k] = c_X(k,k)$$

Aufgabe 3

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$P(\{X_i = 0\}) = P(\{X_i = 1\}) = \frac{1}{2}$$

$$E[X_i] = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$Var[X_i] = E[X_i^2] - E[X_i]^2 =$$

$$= 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$E[S_n] = E\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \frac{n}{2}$$

$$Var[S_n] = Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{n}{4} = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i]$$

Alternativ:

$$Var[S_n] = E[S_n^2] - E[S_n]^2 =$$

$$= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right] - E[S_n]^2 =$$

Aufgabe 4

WSS : wide sense stationarity

- $\mu_X(k) = \text{const.}$
- $r_X(k,l) \overset{!}{=} f(k-l)$ d.h. nur abhängig vom Abstand der Folgenglieder

$\rightarrow$ Aus Stationarität folgt WSS, andersherum nicht.

z. B.

$$r_x(k,l) \stackrel{\Delta}{=} E[x_k x_l] = \alpha^{-(k-l)}$$

Aufgabe 3 **Zufallsfolgen und LTI Systeme** (23 Punkte)

Gegeben sei die reelle Zufallsfolge $x[n], n \in \mathbb{Z}$. Die einzelnen Folgenelemente haben den Erwartungswert Null und seien paarweise unkorreliert, d.h.,

$$\mathrm{E}\left[x[n]\right] = 0, \ \forall n,$$

$$\mathrm{E}\left[x[i]x[j]\right] = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j, \\ \sigma_x^2 & \text{für } i = j. \end{cases}$$

Die unkorrelierte Zufallsfolge wird mit folgendem LTI System gefiltert, wobei $|\alpha| < 1$ gilt:

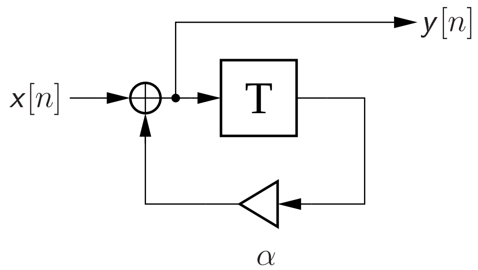

Bild 2: LTI System zur Filterung von $x[n]$.

Die Zufallsfolge $y[n]$ am Filterausgang lautet

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \alpha^{n-k} x[k].$$

a)* Geben Sie die Erwartungswertfolge $\mathrm{E}\left[y[n]\right]$ an.

$$E[Y_n] = E\left[\sum_{k=-\infty}^{n} \alpha^{n-k} X_k\right] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{n} \alpha^{n-k} E[X_k] = \underline{\underline{0}}$$

b)* Bestimmen Sie $\mathrm{E}\left[y[n]x[m]\right]$ für $m \leq n$.

$$E[Y_n X_m] = E\left[\left(\sum_{k=-\infty}^{n} \alpha^{n-k} X_k\right) \cdot X_m\right] =$$

$$= \alpha^{n-m} \sigma_x^2$$

c) Wie lautet die Varianzfolge $\sigma_y^2[n] = \mathrm{E}\left[y[n]y[n]\right]$? Gehen Sie bei der Bestimmung folgendermaßen vor: Ersetzen Sie in $\mathrm{E}\left[y[n]y[n]\right]$ zunächst nur einmal $y[n]$ durch die Summendarstellung und verwenden Sie dann das Ergebnis aus Teilaufgabe b).

Hinweis: $\sum\limits_{k=-\infty}^{n} u^{n-k} = \frac{1}{1-u}$ für $|u| < 1$.

c) $\sigma_y^2(n) = E[Y_n Y_n] = E\left[\sum\limits_{k=-\infty}^{n} \alpha^{n-k} X_k Y_n\right] =$

$= \sum\limits_{k=-\infty}^{n} \alpha^{n-k} E[X_k Y_n] = \sum\limits_{k=-\infty}^{n} \alpha^{n-k} \cdot \alpha^{n-k} \cdot \sigma_x^2$

$= \underbrace{\sum\limits_{k=-\infty}^{n} \alpha^{2(n-k)}} \sigma_x^2 = \sigma_x^2 \cdot \frac{1}{1-\alpha^2}$

$\alpha^{2(n-k)} = (\alpha^2)^{n-k}$

Für die folgenden Teilaufgaben sei die Autokovarianzfunktion $c_y[n,m]$ von $y[n]$ gegeben:

$$c_y[n,m] = \alpha^{|n-m|}\sigma_y^2.$$

d) Begründen Sie anhand der Autokovarianzfunktion und der bisherigen Ergebnisse, weshalb $y[n]$ im weitesten Sinne stationär (WSS) ist.

WSS, da $\mu_x(k)$ ist unabhängig von k und die Kovarianzfolge ist lediglich vom Abstand der Folgenglieder $|n-m|$ abhängig.

Betrachtet man die Autokovarianzfunktion von $y[n]$, so stellt man fest, dass am Ausgang des LTI Filters eine korrelierte Zufallsfolge vorliegt, d. h. $c_y[n,m] \neq 0$ für $n \neq m$. Um diese Korrelationen wieder zu entfernen, wird $y[n]$ erneut mit folgendem LTI System gefiltert:

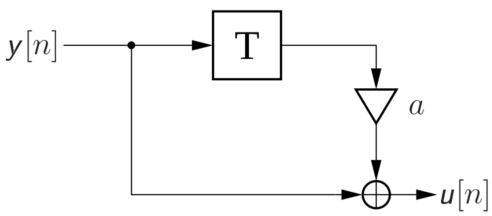

Bild 3: LTI System zur Filterung von $y[n]$.

Die Zufallsfolge $\mathsf{u}[n]$ am Filterausgang lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$\mathsf{u}[n] = \mathsf{y}[n] + a\mathsf{y}[n-1].$$

e)* Bestimmen Sie die Autokovarianzfunktion $c_{\mathsf{u}}[n,m] = \mathrm{E}[\mathsf{u}[n]\mathsf{u}[m]]$ von $\mathsf{u}[n]$. Nehmen sie vereinfachend an, dass $m < n$ gilt.
Hinweis: In diesem Fall gilt z.B. $|n-m| = n-m$.

Term mit dem Produkt der Erwartungswerte entfällt, da 0.

$$c_u[n,m] = E[U_n U_m] = E[(Y_n + aY_{n-1})(Y_m + aY_{m-1})] =$$

$$= E[Y_n Y_m + aY_n Y_{m-1} + aY_{n-1} Y_m + a^2 Y_{n-1} Y_{m-1}] =$$

$$= \alpha^{n-m}\sigma_Y^2 + a\alpha^{n-m+1}\sigma_Y^2 + a\alpha^{n-1-m}\sigma_Y^2 + a^2\alpha^{n-m}\sigma_Y^2$$

folgt aus der Angabe zu d)

f) Wie muss der Koeffizient a gewählt werden, damit die Korrelationen in $\mathsf{u}[n]$ verschwinden, d. h. $c_{\mathsf{u}}[n,m] = 0$ für $m < n$?

$$c_u[n,m] \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + a\alpha + a\alpha^{-1} + a^2 = 0$$

$$a_{1/2} = \frac{-(\alpha + \alpha^{-1}) \pm \sqrt{\alpha^2 + 2 + \alpha^{-2} - 4}}{2}$$

$$= \frac{-\alpha - \alpha^{-1} \pm \sqrt{(\alpha - \alpha^{-1})^2}}{2} = \begin{cases} -\alpha^{-1} \\ -\alpha \end{cases}$$