Aufgabe 3 **Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion** (17 Punkte)

Es seien $X_1 \in \mathbb{N}, \ldots, X_Y \in \mathbb{N}$, Y stochastisch unabhängige, identisch verteilte, diskrete Zufallsvariablen. Weiterhin sei $Y \in \mathbb{N}$ selbst eine stochastisch unabhängige, diskrete Zufallsvariable. Alle Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_Y$ sind identisch verteilt nach der Zähldichte $p_X(k) = p_{X_i}(k)$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Gegeben seien die wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen $G_X(z) = G_{X_i}(z)$, $\forall i \in \mathbb{N}$ von $X_1, \ldots, X_Y$ und $G_Y(z)$ von Y.

In dieser Aufgabe soll nun die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion der Zufallsvariable

$$S_Y = X_1 + \ldots + X_Y = \sum_{i=1}^{Y} X_i$$

untersucht werden.

a)* Betrachten Sie die bedingte Zufallsvariable $S_n = S_Y | \{Y = n\}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ deterministisch ist. Wie lautet die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von S_n in Abhängigkeit von $G_X(z)$?

b)* Geben Sie einen allgemeinen Ansatz zur Berechnung von $G_{S_Y}(z)$ aus der Zähldichte von S_Y an. (Gehen Sie davon aus, dass die Zähldichte $p_{S_Y}(k)$ existiert.)

c)* Bestimmen Sie $\mathsf{P}(\{S_Y = k\})$ allgemein mit Hilfe des Gesetzes der totalen Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von $\mathsf{P}(\{S_n = k\})$.

d) Berechnen Sie nun $G_{S_Y}(z)$.

Falls Sie sich unsicher sind, wie zu verfahren ist, gehen Sie dabei wie folgt vor:

1) Nutzen Sie Ihr Ergebnis aus der vorherigen Teilaufgabe c) um Ihren Berechnungsansatz in Teilaufgabe b) zu erweitern und von S_Y unabhängig zu machen.
2) Nutzen Sie Ihr Ergebnis zu Teilaufgabe a) um $G_X(z)$ in Ihre Berechnungsformel einzubinden und die Formel zu vereinfachen.
3) Nutzen Sie die Definition der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion um Ihre Berechnungsformel um die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von Y zu erweitern und die Aufgabe abzuschließen.

Hinweis: $\sum_i \sum_j f(i,j) = \sum_j \sum_i f(i,j)$ (Kommutativgesetz).

e)* Nun seien sämtliche $X_n, n \in \mathbb{N}_0$ und Y identisch Poisson verteilt mit dem Parameter λ. Berechnen Sie den Erwartungswert von S_Y mit Hilfe von $G_{S_Y}(z)$.

Falls Sie die vorherigen Teilaufgaben nicht lösen konnten, rechnen Sie mit $G_{S_Y}(z) = G_X(G_Y(z))$ weiter.