Aufgabe 1

Gegeben seien die beiden normalverteilten Zufallsvariablen $\mathsf{X} \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $\mathsf{Y} \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Ferner sei ihre Kovarianz $\mathsf{Cov}[\mathsf{XY}] = \rho_{\mathsf{XY}}\sigma_{\mathsf{X}}\sigma_{\mathsf{Y}}$.
Zwischen beiden Zufallsvariablen wird ein linearer Zusammenhang vermutet, d.h. eine Approximation $\hat{\mathsf{Y}}$ lässt sich als

$$\mathsf{Y} = \alpha\mathsf{X} + \beta \tag{1}$$

darstellen.

1. Bestimme die Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass der mittlere quadratische Fehler $\mathsf{E}\left[(\hat{\mathsf{Y}} - \mathsf{Y})^2\right]$ minimal wird:

$$\alpha^*, \beta^* = \arg\min_{\alpha,\beta} \mathsf{E}\left[(\hat{\mathsf{Y}} - \mathsf{Y})^2\right] \tag{2}$$

   Setzen Sie hierzu (1) in (2) ein, vereinfachen Sie den Ausdruck und formulieren Sie die notwendigen Stationaritätsbedingungen. Sind diese auch hinreichend im vorliegenden Fall?

2. In weiterführenden Vorlesungen wird gezeigt, dass ein Schätzer $T(\mathsf{X})$ für Y im MSE-optimalen Sinne durch den Conditional Mean

$$\hat{\mathsf{Y}} = T(\mathsf{X}) = \mathsf{E}[\mathsf{Y}|\mathsf{X}] \tag{3}$$

   gegeben ist. Zudem sei an dieser Stelle angemerkt das die bedingte Zufallsvariable $\mathsf{Y}|\mathsf{X} = x$ im Falle von Gauss'schen ZV $\mathcal{N}(\mu_{\mathsf{Y}} + \frac{c_{\mathsf{YX}}}{\sigma_{\mathsf{X}}^2}(\mu_{\mathsf{X}} - x), \sigma_{\mathsf{Y}}^2 - \frac{c_{\mathsf{YX}}^2}{\sigma_{\mathsf{X}}^2})$ verteilt ist. Wie sieht also der hiermit berechnete Schätzer im Vergleich zum Ansatz in der ersten Teilaufgabe aus?