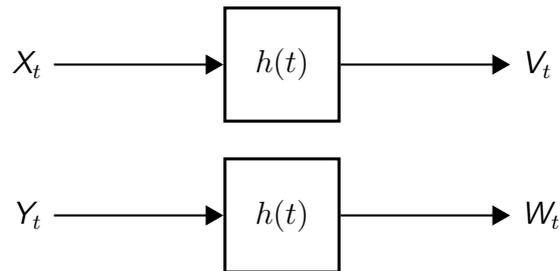


Aufgabe 4 Filterung von Zufallsprozessen (12 Punkte)

Gegeben seien zwei gemeinsam im weiteren Sinne stationäre reelle Zufallsprozesse $(X_t : t \in \mathbb{R})$ und $(Y_t : t \in \mathbb{R})$ mit der Kreuzkorrelationsfunktion

$$r_{X,Y}(s,t) = r_{X,Y}(s-t) = r_{X,Y}(\tau).$$

Die beiden Prozesse werden nun mit zwei baugleichen LTI-Systemen mit der Impulsantwort $h(t)$ gefiltert, wodurch sich die Prozesse $(V_t : t \in \mathbb{R})$ und $(W_t : t \in \mathbb{R})$ ergeben. Die Anordnung lässt sich wie folgt darstellen:



-
- a)* Geben Sie das Leistungsdichtespektrum
- $S_V(f)$
- in Abhängigkeit des Leistungsdichtespektrums
- $S_X(f)$
- und der Übertragungsfunktion
- $H(f) \bullet \text{---} \circ h(t)$
- an.

-
- b)* Berechnen Sie
- $r_{V,Y}(s,t)$
- in Abhängigkeit von
- $r_{X,Y}(\tau)$
- und
- $h(t)$
- und schreiben Sie das Ergebnis als Integral.

Hinweis: Verwenden Sie $V_s = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)X_{s-u}du$.

Die Kreuzkorrelationsfunktion von $(V_t : t \in \mathbb{R})$ und $(W_t : t \in \mathbb{R})$ ergibt sich zu

$$r_{V,W}(\tau) = (\tilde{h} * h * r_{X,Y})(\tau),$$

wobei $\tilde{h}(t) = h(-t)$.

c)* Bestimmen Sie das Kreuzleistungsdichtespektrum $S_{V,W}(f)$ in Abhängigkeit des Kreuzleistungsdichtespektrums $S_{X,Y}(f)$ und der Übertragungsfunktion $H(f) \bullet \text{---} \circ h(t)$.



Nun werde der Prozess $(D_t : t \in \mathbb{R})$ mit $D_t = V_t - W_t$ betrachtet.

d)* Bestimmen Sie die Autokorrelationsfunktion $r_D(\tau) = E[D_t D_{t-\tau}]$ in Abhängigkeit von $r_V(\tau)$, $r_W(\tau)$ und $r_{V,W}(\tau)$.



e) Geben Sie nun das Leistungsdichtespektrum $S_D(f)$ in Abhängigkeit von $S_X(f)$, $S_Y(f)$ und $S_{X,Y}(f)$ an.

