

**Aufgabe 3 Poisson-Prozess** (12 Punkte)

Der Zufallsprozess  $\mathfrak{s}_t$  repräsentiere die Gesamtzahl aller e-Mails, die zum Zeitpunkt  $t$  auf einem Mailserver gespeichert werden. Dabei sei  $\mathfrak{s}_t$  ein Poisson-Prozess mit Parameter  $\lambda > 0$ .

 a)\* Welchen Wert nimmt der Prozess  $\mathfrak{s}_t$  für  $t < 0$  an? b)\* Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass zum Zeitpunkt  $t \geq 0$  keine e-Mail auf dem Server gespeichert ist. c) Wie lautet der Erwartungswert  $E[\mathfrak{s}_t]$  für  $t \geq 0$ ? d) Geben Sie mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung eine obere Grenze für die Wahrscheinlichkeit an, dass  $\{|\mathfrak{s}_t - \lambda t| \geq \varepsilon\}, t \geq 0, \varepsilon \geq 0$ .

**Hinweis:**  $\text{Var}[\mathfrak{s}_t] = \lambda t, t \geq 0$ .

e) Für welche Werte von  $\varepsilon$  (abhängig von  $t$ ) hat diese obere Grenze keine Bedeutung? Begründen Sie Ihre Antwort!



**Hinweis:** Überlegen Sie, welche Werte eine Wahrscheinlichkeit annehmen kann.

Da der Speicher des Mailservers nicht unbegrenzt ist, nehmen wir nun an, dass jede e-Mail nach einem Zeitraum  $T$  wieder gelöscht wird. Die Gesamtzahl aller e-Mails auf dem Server ist dann durch den Zufallsprozess

$$\tilde{s}_t = s_t - x_t$$

gegeben. Dabei bezeichnet  $s_t$  unverändert den Poisson-Prozess mit Parameter  $\lambda$ . Der zweite Zufallsprozess  $x_t$  beschreibt die Anzahl der e-Mails, die bis zum Zeitpunkt  $t$  wieder gelöscht wurden, weil sie zuvor bereits für einen Zeitraum  $T$  auf dem Server lagen. Der Zufallsprozess  $\tilde{s}_t$  beschreibt also die Anzahl der e-Mails, welche im Zeitintervall  $[t - T, t]$  bei dem Mailserver eingetroffen sind.

f)\* Geben Sie  $x_t$  in Abhängigkeit des Zufallsprozesses  $s_t$  an.



g) Wie lautet die Zähldichte der Zufallsvariable  $\xi_t$  zum Zeitpunkt  $t$ ? Unterscheiden Sie die Bereiche

1)  $0 \leq t < T$ ,

2)  $t \geq T$ .

**Hinweis:** Nutzen Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe a).

