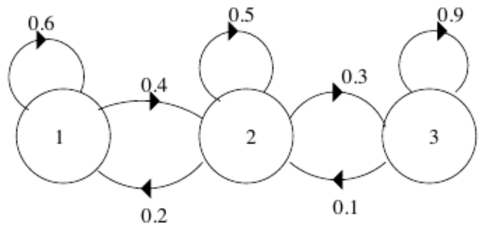
Stochastische Signale Mentorübung WS 13/14 Fabian Steiner	Blatt: **11** 21.01.2014 *Thema: Markow-Ketten*

Aufgabe 1: MIT OpenCourseWare, 6.041/6.431 Fall 2010 Final Exam, Task 1

Consider a Markov chain $\mathsf{X} : n \in \mathbb{N}_0$, specified by the following transition diagram.



1. Calculate the transition probability matrix $\mathbf{\Pi}$.

2. Given that the chain starts with $\mathsf{X}_0 = 1$, find the probability that $\mathsf{X}_2 = 2$.

3. Find the steady-state probabilities $\mathbf{p}_\infty = (p_{\infty_1}, p_{\infty_2}, p_{\infty_3})^T$ of the different states.

4. Let $\mathsf{Y}_n = \mathsf{X}_n - \mathsf{X}_{n-1}$. Thus, $\mathsf{Y}_n = 1$ indicates that the n^{th} transition was to the right, $\mathsf{Y}_n = 0$ indicates it was a self-transition, and $\mathsf{Y}_n = -1$ indicates it was a transition to the left. Find $\lim_{n\to\infty} Pr(\mathsf{Y}_n = 1)$.

5. Given that the n^{th} transition was a transition to the right ($\mathsf{Y}_n = 1$), find the probability that the previous state was state 1. (You can assume that n is large.)

Aufgabe 4 **Random Rotation** (11 Punkte)

Sei $(S_n : n \in \mathbb{N})$ ein symmetrischer Random Walk mit Schrittweite $\delta = \frac{2\pi}{3}$ und $S_0 = 0$.

a)* Interpretieren Sie S_n als Winkel und markieren Sie alle möglichen Werte auf dem Einheitskreis in Bild 3. **Hinweis:** $\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$.

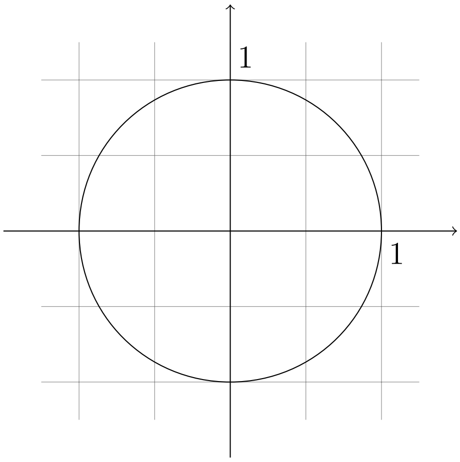


Bild 3: Lösung von Aufgabe a) und b).

Betrachtet man äquivalente Winkel jeweils als einen Zustand, kann die betrachtete Zufallsfolge als Markowkette mit der Übergangsmatrix

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

angesehen werden.

b) Vervollständigen Sie Bild 3 zum Zustandsübergangsgraphen der Markowkette.

c)* Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{p}_\infty = [\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}]^{\mathrm{T}}$ eine stationäre Verteilung der Markowkette ist.

Betrachtet werde nun die Zufallsfolge $(X_n : n \in \mathbb{N})$ mit

$$X_n = \cos(S_n).$$

d)* Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}[X_n]$ für $n = 1$. **Hinweis:** Überlegen Sie, welche Werte X_n in diesem Zeitschritt annehmen kann.

e)* Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}[X_n]$ für große n.

f) Ist $(X_n : n \in \mathbb{N})$ stationär? Begründen Sie Ihre Antwort.