Aufgabe 3 **Zufallsfolgen und LTI Systeme** (23 Punkte)

Gegeben sei die reelle Zufallsfolge $\mathsf{x}[n], n \in \mathbb{Z}$. Die einzelnen Folgenelemente haben den Erwartungswert Null und seien paarweise unkorreliert, d.h.,

$$\mathrm{E}\left[\mathsf{x}[n]\right] = 0, \ \forall n,$$

$$\mathrm{E}\left[\mathsf{x}[i]\mathsf{x}[j]\right] = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j, \\ \sigma_{\mathsf{x}}^2 & \text{für } i = j. \end{cases}$$

Die unkorrelierte Zufallsfolge wird mit folgendem LTI System gefiltert, wobei $|\alpha| < 1$ gilt:

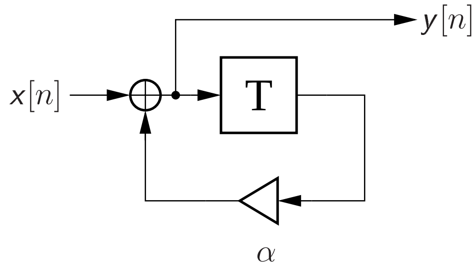

Bild 2: LTI System zur Filterung von $\mathsf{x}[n]$.

Die Zufallsfolge $\mathsf{y}[n]$ am Filterausgang lautet

$$\mathsf{y}[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \alpha^{n-k} \mathsf{x}[k].$$

a)* Geben Sie die Erwartungswertfolge $\mathrm{E}\left[\mathsf{y}[n]\right]$ an.

b)* Bestimmen Sie $\mathrm{E}\left[\mathsf{y}[n]\mathsf{x}[m]\right]$ für $m \leq n$.

c) Wie lautet die Varianzfolge $\sigma_y^2[n] = \mathrm{E}\left[y[n]y[n]\right]$? Gehen Sie bei der Bestimmung folgendermaßen vor: Ersetzen Sie in $\mathrm{E}\left[y[n]y[n]\right]$ zunächst nur einmal $y[n]$ durch die Summendarstellung und verwenden Sie dann das Ergebnis aus Teilaufgabe b).

Hinweis: $\sum\limits_{k=-\infty}^{n} u^{n-k} = \frac{1}{1-u}$ für $|u| < 1$.

Für die folgenden Teilaufgaben sei die Autokovarianzfunktion $c_y\left[n,m\right]$ von $y[n]$ gegeben:

$$c_y\left[n,m\right] = \alpha^{|n-m|}\sigma_y^2.$$

d) Begründen Sie anhand der Autokovarianzfunktion und der bisherigen Ergebnisse, weshalb $y[n]$ im weitesten Sinne stationär (WSS) ist.

Betrachtet man die Autokovarianzfunktion von $y[n]$, so stellt man fest, dass am Ausgang des LTI Filters eine korrelierte Zufallsfolge vorliegt, d. h. $c_y\left[n,m\right] \neq 0$ für $n \neq m$. Um diese Korrelationen wieder zu entfernen, wird $y[n]$ erneut mit folgendem LTI System gefiltert:

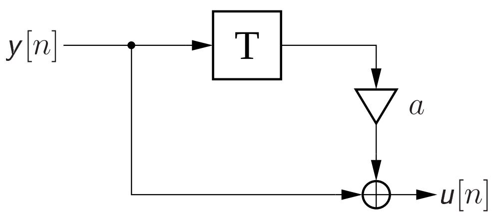

Bild 3: LTI System zur Filterung von $y[n]$.

Die Zufallsfolge $\mathsf{u}[n]$ am Filterausgang lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$\mathsf{u}[n] = \mathsf{y}[n] + a\mathsf{y}[n-1].$$

e)* Bestimmen Sie die Autokovarianzfunktion $c_{\mathsf{u}}[n,m] = \mathrm{E}[\mathsf{u}[n]\mathsf{u}[m]]$ von $\mathsf{u}[n]$. Nehmen sie vereinfachend an, dass $m < n$ gilt.
Hinweis: In diesem Fall gilt z.B. $|n-m| = n-m$.

f) Wie muss der Koeffizient a gewählt werden, damit die Korrelationen in $\mathsf{u}[n]$ verschwinden, d. h. $c_{\mathsf{u}}[n,m] = 0$ für $m < n$?