ST2-Tutorübung - Blatt 7, 21.06.2011

Einführung nichtlineare Schaltungen

vorher: $\dot{\underline{x}} = \underset{\sim}{A}\,\underline{x} + \underline{b}\,u$ (SISO-System)

$(y = c^T \underline{x} + d u)$

nun: $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$

<u>Vorgehen:</u>

1. Gleichgewichtspunkt bestimmen

$$\dot{\underline{x}} = 0 \Leftrightarrow \underline{f}(\underline{x}) = 0$$

↳ häufig nur noch numerische Lösung möglich (Newton, Fixpunktiterationen, fsolve(...))

2. Linearisierung um den Gleichgewichtspunkt

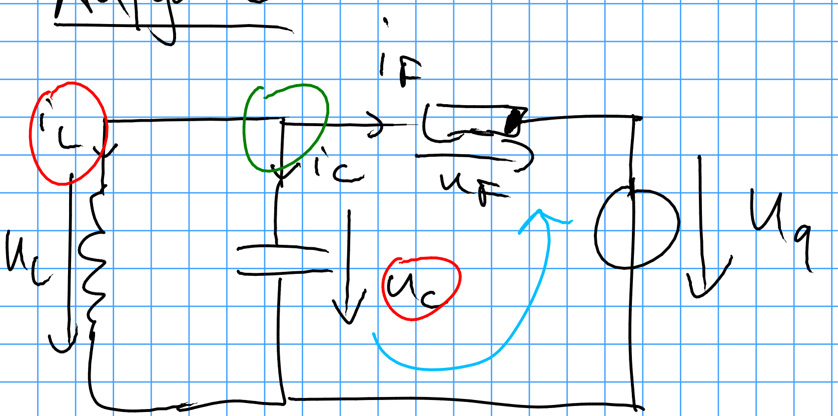
$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} = \underline{x}_{GGP} + \Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta \dot{x} = J \Delta \underline{x}$$

Satz v. Hartmann: Wenn in einem GGP p der Realteil aller Eigenwerte der Jacobi-Matrix ungleich 0 ist, dann verhält sich das lineare System in einer Umgebung von p qualitativ genau so wie das nichtlineare..

Aufgabe



1. Zustandsgrößen
   u_C, i_C
2. Zustandsgleichungen

$$\dot u_C = \frac{1}{C} i_C = \frac{1}{C} f_1(u_C, i_C)$$

$$\dot i_L = \frac{1}{L} u_L = \frac{1}{L} f_2(u_C, i_L)$$

$$\dot i_L = \frac{1}{L} u_C$$

$$\dot u_C = \frac{1}{C} i_C$$

Knoten: $i_L + i_C + i_F = 0$

$$i_C = -(i_L + i_F) =$$

$$= -\left(i_L + \frac{1}{I_A^2 R^3}(u_F - U_A)^3 - \frac{u_F - U_A}{R} + I_A\right)$$

$u_F = u_C - U_q = u_C + U_A$

oben eingesetzt:

$$\begin{cases} \dot{u}_C = -\frac{1}{C}\left(i_L + \frac{1}{I_A^2 R^3} u_C^3 - \frac{u_C}{R} + I_A \right) \\ \dot{i}_L = \frac{1}{L} u_C \end{cases}$$

3. GGP berechnen

$$\begin{cases} \dot{u}_C = 0 \\ \dot{i}_L = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad u_{C,GGP} = 0$$

$$0 = -\frac{1}{C}\left(i_L + I_A \right)$$

$$\Rightarrow \quad i_{L,GGP} = -I_A$$

$$\Rightarrow \underline{x}_{GGP} = \begin{pmatrix} 0 \\ -I_A \end{pmatrix}$$

4. Durchführen der Linearisierung

$$\Delta \dot{\underline{x}} = J \Delta x \qquad \text{mit} \quad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} u_C \\ i_L \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C}\left(\frac{3 u_C^2}{I_A^2 R} - \frac{1}{R} \right) & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} = \Big|_{GGP} \begin{pmatrix} \frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}$$

5. EW/EV bestimmen

$$\det(\lambda \underset{\sim}{E} - J) \overset{!}{=} 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{RC} & +\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & \lambda \end{vmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$\lambda^2 - \frac{1}{RC}\lambda + \frac{1}{LC} \overset{!}{=} 0$$

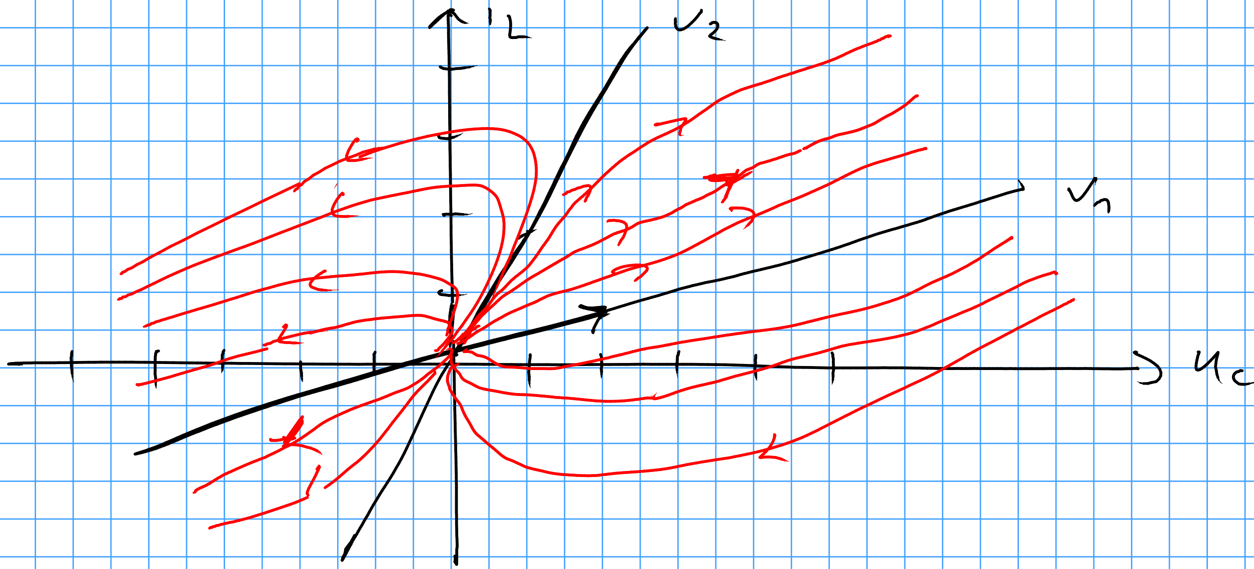
$$\lambda_{1/2} = \frac{\frac{1}{RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2}$$

6. $R = 0{,}5\,\Omega$
$C = 1F$
$L = 2H$

$$\lambda_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-2}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} 1{,}7 \\ 0{,}3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ instabiler Knoten, da $\mathrm{Im}(\lambda_{1/2}) = 0$
$\lambda_{1/2} > 0$

$$v_1 \approx \begin{pmatrix} 1{,}9 \\ 0{,}56 \end{pmatrix} \qquad v_2 \approx \begin{pmatrix} 1{,}01 \\ 1{,}72 \end{pmatrix}$$



[o. B. d. A $I_A = 0$] $\underline{x}_{GGP} = \begin{pmatrix} 0 \\ -I_A \end{pmatrix}$

7. Nichts: Es liegen verlustlose Elemente vor.

8. $E_D = 0 \iff \dfrac{3\pi \hat{u}_c^4 - 4\pi \hat{u}_c^2 R^2 I_A^2}{4 I_A^2 R^3 \omega} = 0$

$\hat{u}_c = 0 \qquad 3\pi \hat{u}_c^2 - 4\pi R^2 I_A^2 = 0$

$\hat{u}_c = \sqrt{\dfrac{4R^2 I_A^2}{3}}$