ST2 - Tutorübung Blatt 4 - 31.05.2011

Lineare Schaltungen 2. Grades

Skalarer Fall: $x(t) = x(t_\infty) + \left[x(t_0) - x(t_\infty)\right] e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$

"vektorieller Fall": $\underline{x}(t) = e^{t\underset{\sim}{A}} \underline{x}_0$

$$e^{t\underset{\sim}{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\underset{\sim}{A})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{\Lambda}\underset{\sim}{Q}^{-1})^k}{k!} =$$

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{\Lambda}\underset{\sim}{Q}^{-1} = \left(q_1 \; q_2 \cdots q_n\right) \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \underset{\sim}{Q}^{-1}$$

Eigenvektoren von $\underset{\sim}{A}$

EW zu $q_1, q_2, \ldots, q_n$ von A

$$(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{\Lambda}\underset{\sim}{Q}^{-1})^k = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{\Lambda}\underbrace{\underset{\sim}{Q}^{-1}\underset{\sim}{Q}}\underset{\sim}{\Lambda}\underset{\sim}{Q}\cdots =$$

$$= \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{\Lambda}^k\underset{\sim}{Q}^{-1}$$

$$= \underset{\sim}{Q}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t\Lambda)^k}{k!}\underset{\sim}{Q}^{-1} = Q \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \lambda_2^k & \\ & & \ddots \; \lambda_n^k \end{pmatrix} \underset{\sim}{Q}^{-1}$$

$$= \underset{\sim}{Q} \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t\lambda_1)^k}{k!} & & & \\ & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t\lambda_2)^k}{k!} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t\lambda_n)^k}{k!} \end{pmatrix} \underset{\sim}{Q}^{-1}$$

$$= \underset{\sim}{Q} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \underset{\sim}{Q}^{-1}$$

$$\underline{x}(t) = e^{t\underset{\sim}{A}} \underline{x}_0 = \underset{\sim}{Q} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \underbrace{\underset{\sim}{Q}^{-1} \underline{x}_0}_{\underline{c}} =$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{q}_1 e^{\lambda_1 t} & \underline{q}_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & \underline{q}_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} =$$

$$= c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{q}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \underline{q}_2 + \cdots c_n e^{\lambda_n t} \underline{q}_n$$

Phasenportraits:

$\rightarrow$ erste Unterscheidung: $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$\updownarrow$

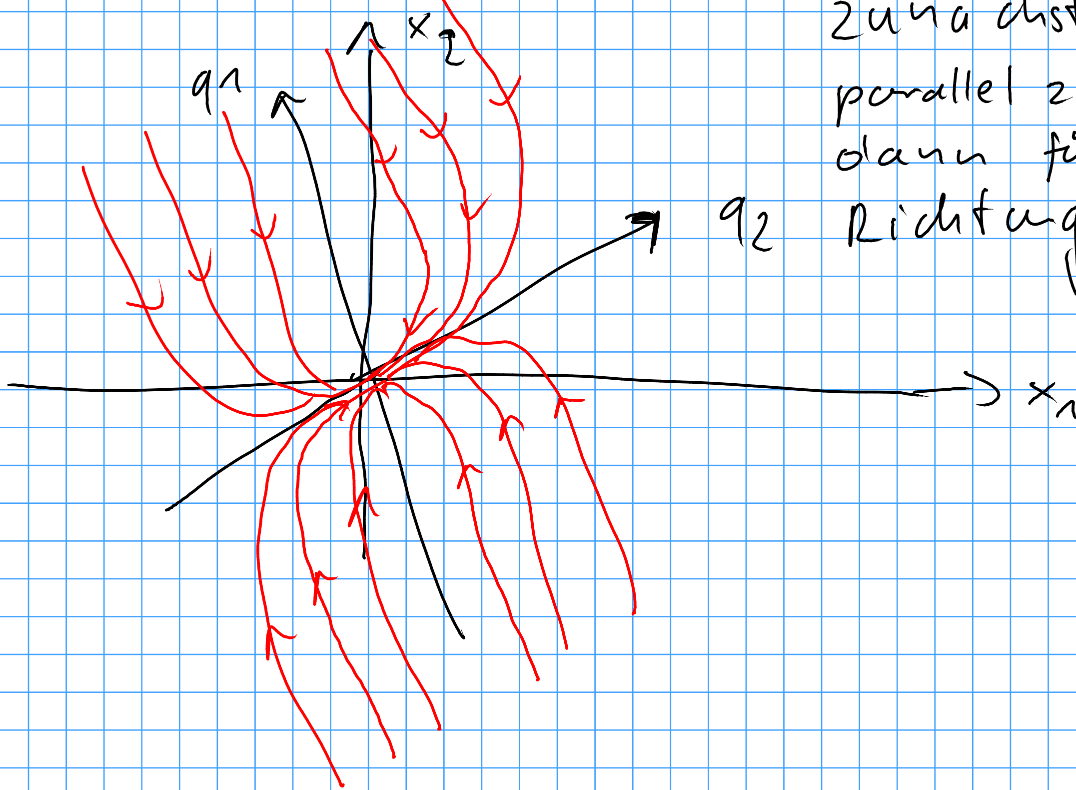
$(\lambda_i \in \mathbb{C})$ $\rightarrow$ stabiler / instabiler Strudel

Wirbel

1. Fall $\quad \lambda_1 < 0, \ \lambda_2 < 0$: stabiler Knoten

$\lambda_1 \downarrow \underline{q}_1 \qquad \lambda_2 \downarrow \underline{q}_2$

o.B.d.A: $|\lambda_1| > |\lambda_2|$

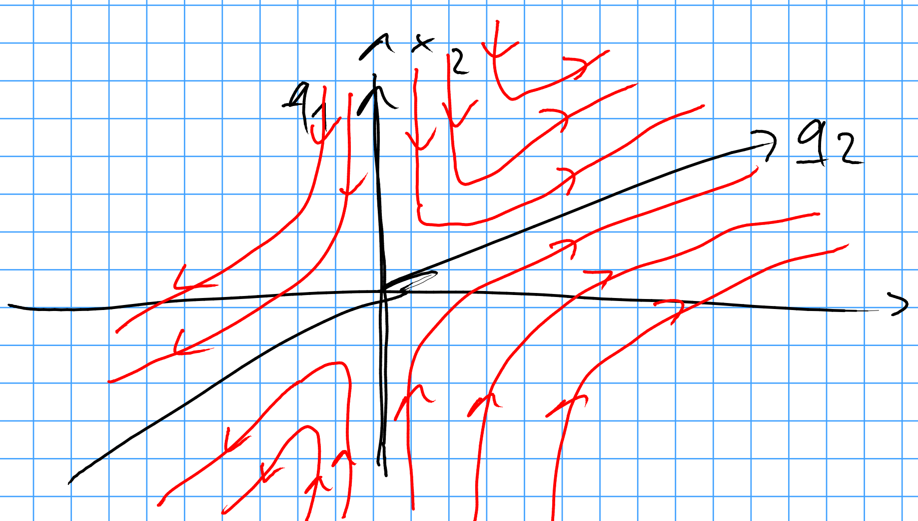


zunächst (für $t \to -\infty$) parallel zu q_1 und dann für $t \to \infty$ in Richtung von q_2

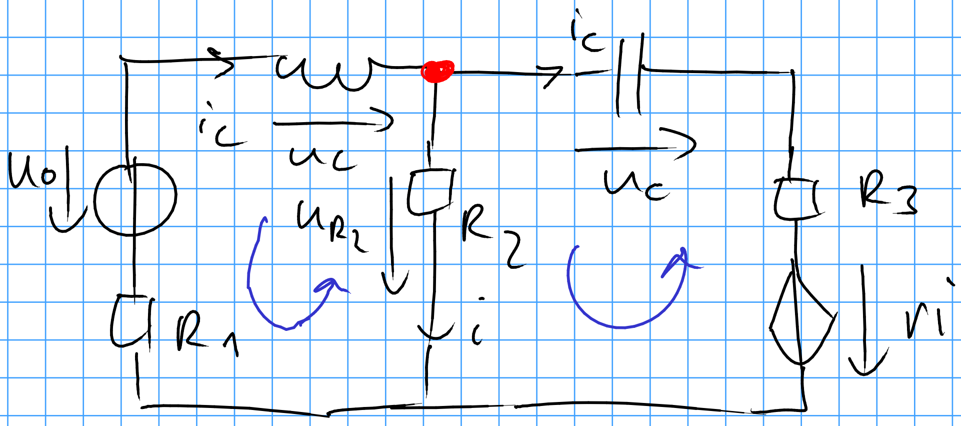
2. Fall: $\lambda_1, \lambda_2 > 0$: instabiler Knoten

s.o. (jedoch Umdrehen der Pfeilrichtung)

3. Fall $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$: Sattelpunkt



Trajektorien kommen aus der Richtung, die vom EV zum negativen EW bestimmt wird



Zustandsgr.: i_L, u_C

$$\dot{u}_C = \frac{1}{C} i_C = \frac{1}{C} \cdot f_1(u_C, i_L)$$

$$\dot{i}_L = \frac{1}{L} u_L = \frac{1}{L} f_2(u_C, i_L)$$

Knoten: $i_L = i + i_C$

Schleife: $u_{R_2} = R_2 i = u_C + R_3 i_C + ri$

$$\Rightarrow i(R_2 - r) = u_C + R_3 i_C$$

$$i = \frac{u_C + R_3 i_C}{R_2 - r}$$

$$i_L = \frac{u_C + R_3 i_C}{R_2 - r} + i_C =$$

$$= \frac{u_C}{R_2 - r} + \frac{R_3}{R_2 - r} i_C + i_C$$

$$\Rightarrow i_C = \frac{i_L - \frac{u_C}{R_2 - r}}{1 + R_3/R_2 - r}$$

1. Zustandsgleichung:

$$\dot{u}_c = \frac{1}{C}\left(-\frac{u_c}{R_2+R_3-r} + \frac{i_L(R_2-r)}{R_2+R_3-r}\right)$$

Weiterhin gilt:

$$u_L = U_0 - R_1 i_L - u_{R_2} =$$

$$= U_0 - R_1 i_L - R_2 i =$$

$$= U_0 - R_1 i_L - R_2\left(\frac{u_c}{R_2-r} + \frac{R_3}{R_2-r}\left[\frac{(R_2-r)i_L - u_C}{R_2+R_3-r}\right]\right) =$$

$$= U_0 - R_1 i_L - \frac{R_2 R_3}{R_2+R_3-r} i_L - \frac{u_c R_2}{R_2+R_3-r}$$

$$\dot{\underline{x}} = \underset{\sim}{A}\,\underline{x}$$

$$\underset{\sim}{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C(R_2+R_3-r)} & \frac{R_2-r}{C(R_2+R_3-r)} \\ \frac{-R_2}{L(R_2+R_3-r)} & -\frac{1}{L}\left(R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2+R_3-r}\right) \end{pmatrix}$$

Einsetzen der Vereinfachung:

$$\underset{\sim}{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 \\ -\frac{1}{L} & -\frac{2R}{L} \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{RC} - \lambda & 0 \\ -\frac{1}{L} & -\frac{2R}{L} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{1}{RC} - \lambda\right)\left(-\frac{2R}{L} - \lambda\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{RC} \qquad \lambda_2 = -\frac{2R}{L}$$

EV berechnen: $(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{E}_2) v \overset{!}{=} 0$

allg. $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L} & -\frac{2R}{L} + \frac{1}{RC} & 0 \end{array}\right)$ $\qquad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2R}{L} + \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} + \frac{2R}{L} & 0 \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Fall

$R = 1\,\Omega$

$C = 1\,F$

$L = 1\,H$

$\lambda_1 = -1\,\frac{1}{s}$

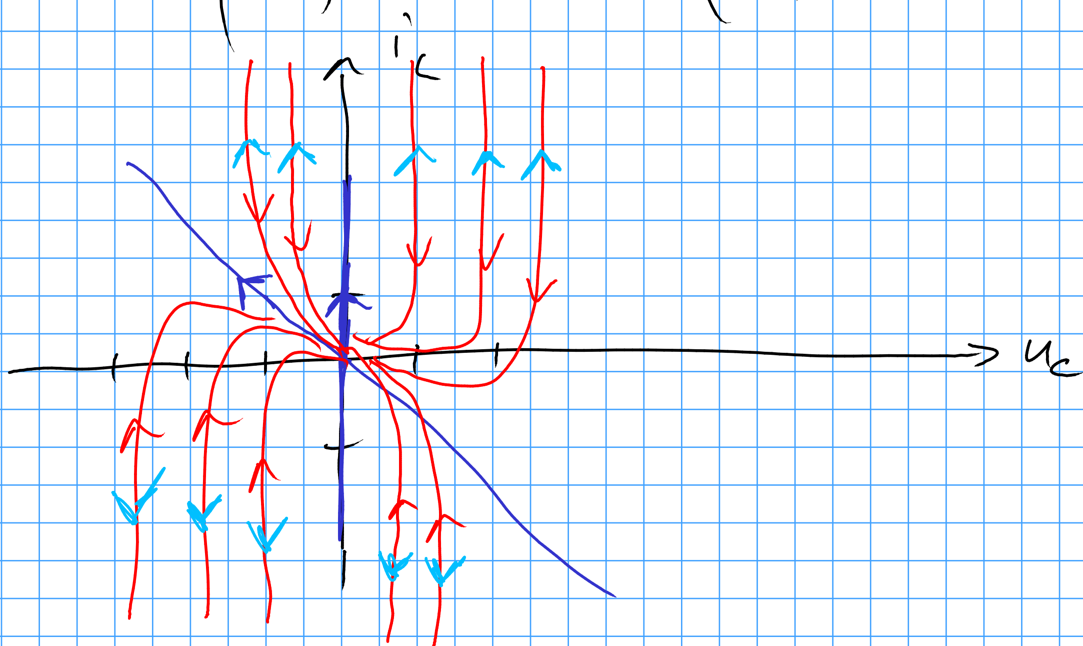
$\lambda_2 = -2\,\frac{1}{s}$

$\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0$

$\mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$

$\Rightarrow$ stabiler Knoten

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



2. Fall: $R = -1\,\Omega$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 1\,\frac{1}{s} \\ \lambda_2 = 2\,\frac{1}{s} \end{array}\right\} \text{instabiler Knoten}$$

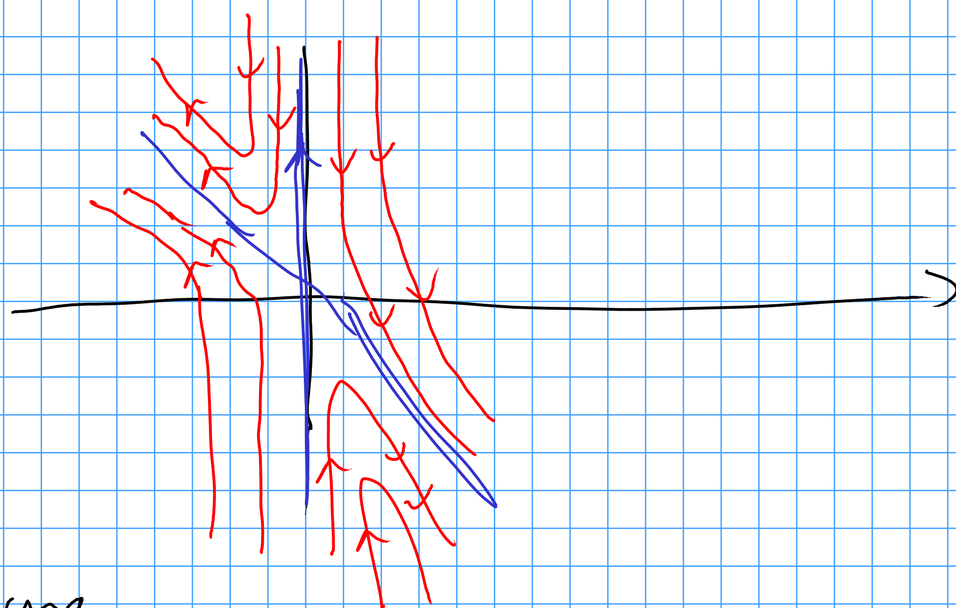
↳ siehe vorhergehende Zeichnung

3. Fall : $C = -1F$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 1\tfrac{1}{s} \\ \lambda_2 &= -2\tfrac{1}{s} \end{aligned}\right\} \text{Sattelpunkt}$$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



7. allg. Lösung

$$\underline{x} = c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{q}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \underline{q}_2$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} u_C \\ i_C \end{pmatrix}$$

$u_C(t_0 = 0ms) = 2V$

$i_L(0) = 1A$

$$\begin{pmatrix} 2V \\ 1A \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1V \\ 1A \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0V \\ 1A \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

6. $\dot{\underline{x}} = \underset{\sim}{A}\, x + \underline{b}\, u$

Gleichgewichtsfall: $\dot{\underline{x}} = 0$

$\underset{\sim}{A}\, \underline{x} + \underline{b} u = 0$

[Annahme: Betrachtung für ersten Fall]

$$\Rightarrow \underline{x}_{GGP} = -\underset{\sim}{A}\, \underline{b} u =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_0 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Autonome Erregung führt zu einer Verschiebung des Gleichgewichtpunktes in den Punkt $(0; -20)$

$\Rightarrow$ Hintergründe zu dieser Aufgabe werden nächste Stunde nochmals ausführlich besprochen

(8.6.2011)

Weiterer Hinweis zur Berechnung der EW gemäß Formelsammlung bzw. Skript:

$$\lambda_{1/2} = \frac{T}{2} \pm \sqrt{\frac{T^2}{4} - \Delta}$$

mit $T = tr(A)$ $\quad \Delta = det\, A$

$$T = -\frac{1}{RC} - \frac{2R}{L} \qquad \Delta = \frac{2}{LC}$$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{1}{2RC} - \frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(RC)^2} + \frac{4}{LC} + \frac{4R^2}{L^2}\right) - \frac{2}{LC}} =$$

$$= -\frac{1}{2RC} - \frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{1}{4(RC)^2} - \frac{1}{LC} + \left(\frac{R}{L}\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2RC} - \frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC} - \frac{R}{L}\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2RC} - \frac{R}{L} \pm \left(\frac{1}{2RC} - \frac{R}{L}\right) = \ldots$$