ST 2 - Tutorübung - Blatt 2, 17.5.2011

## Einführung

$$L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) = u_0(t)$$

Lineare Differentialgl. 1. Ordnung

höchste vorkommende Ableitung linear

Grad der Ableitung

$$\left(\frac{di(t)}{dt}\right)^2 + i(t) R = u_0$$

Allgemein: $\dot{x}(t) + f(t)\, x(t) = g(t)$

allg. $x(t) = \left(\int g(t)\, e^{F(t)}\, dt\right) e^{-F(t)} + C e^{-F(t)}$

mit $F(t) = \int f(t)\, dt \; (+\, C)$

Wichtige Spezialfälle:

$g(t) = \text{const.}$ : autonomer Fall

$g(t) = 0$ : homogener Fall

**1. Fall** $\quad u_0(t) = 0$

$$\dot{i} = \frac{R}{L} i \quad ; \quad f(t) = -\frac{R}{L}$$

$$g(t) = 0$$

$$i(t) = C \cdot e^{-R/Lt}$$

$$i(t=0) = 1A \quad \Rightarrow \quad C = 1A$$

**2. Fall** $\quad u_0(t) = u_0$

$$\dot{i} + \frac{R}{L} i = \frac{u_0}{L}$$

$$i(t) = \left( \int g(t)\, e^{F(t)}\, dt \right) e^{-F(t)} + C e^{-F(t)}$$

$$= \left( \frac{u_0}{L} \int e^{t/\tau}\, dt \right) e^{-t/\tau} + C e^{-t/\tau}$$

$$= \frac{u_0}{R} + C e^{-t/\tau}$$

$$\tau = \frac{1}{GL} = \frac{R}{L}$$

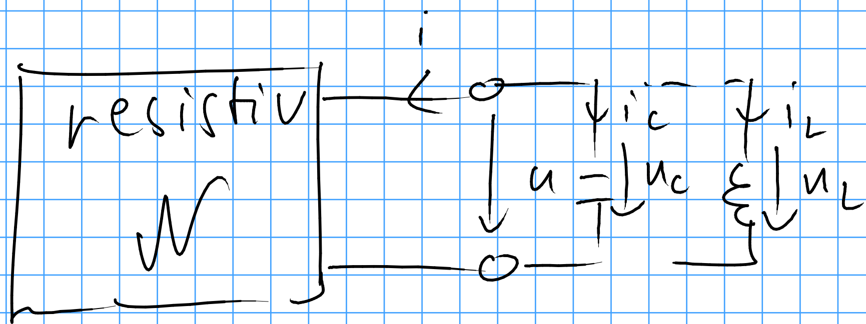
Bestimmung der Konstanten:

$$i(0) = I_0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u_0}{R} + C = I_0$$

$$C = I_0 - \frac{u_0}{R}$$

$$i(t) = \frac{u_0}{R} + \left( I_0 - \frac{u_0}{R} \right) e^{-t/\tau}$$

# Dynamischer Pfad




$u = u_L = u_C$

$i_C = i_L = -i$

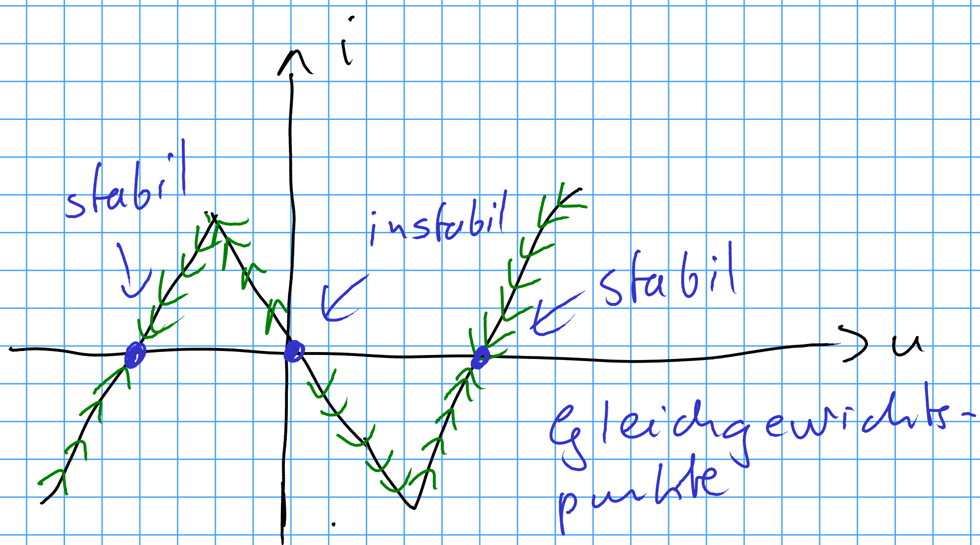
Kondensator: $\dot{u}_C = \frac{1}{C} i_C = \frac{1}{C}(-i)$

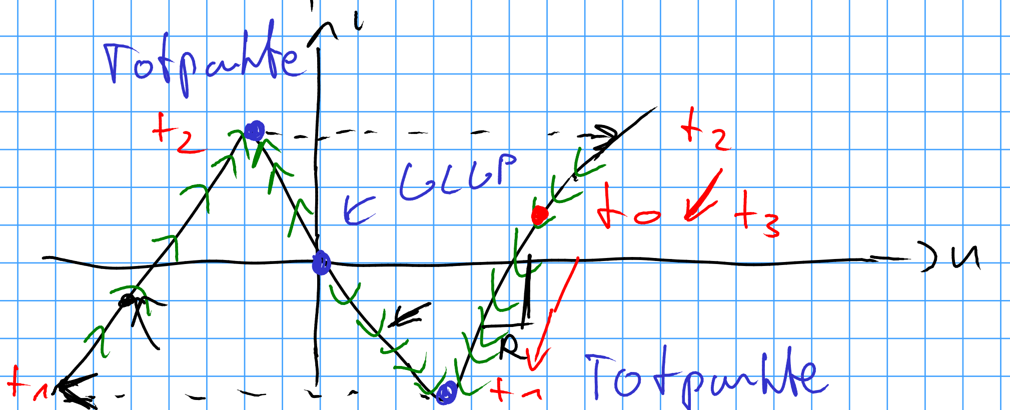
↳ $u_C$ stetig

Induktivität: $\dot{i}_L = \frac{1}{L} u_L$

↳ $i_L$ stetig

$\dot{i} = -\frac{1}{L} u$




Fall: Beschaltung mit Kondensator

$\dot{u} = -\frac{1}{C} i$

Gleichgewicht (≙ stat. Fall)

$\dot{u}_C = 0 = i$

Fall: Beschaltung mit Induktivität

$\dot{i} = -\frac{1}{L} u$

⊕ ⊖

↳ Relaxationsoszillator

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{t_3 - t_0}$$

Kochrezept:

- Startwerte auf der Kennlinie vorgegeben

  $i_L(t_0) = -i$

  $u_C(t_0) = u$

- Werte in Zustandsgleichung einsetzen

$$x(t) = x(t\infty) + [x(t_0) - x(t\infty)]\, e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \quad (*)$$

  $\tau = RC$

  $x(t\infty)$ zu ermitteln über die Geradengleichungen des abschnittweise definierten Eintors

- Im Totpunkt: Berechnung von $t_1$ durch Auflösen der $(*)$ Gleichung

- Neuen Kennlinienast betrachten

# Aufgabe 2

1. $u = u_L$

   $i = -i_L$

2. $u_L = \frac{d\phi_L}{dt}$ $\qquad \phi_L(t) = \phi_0(t=t_0) + \int_{t_0}^{t} u_L(\tau)\,d\tau$

3. $i_L = I_0 \sin\left(\frac{\phi_L}{\phi_0}\right)$

   $\frac{i_L}{I_0} = \sin\left(\frac{\phi_L}{\phi_0}\right) \quad | \arcsin$

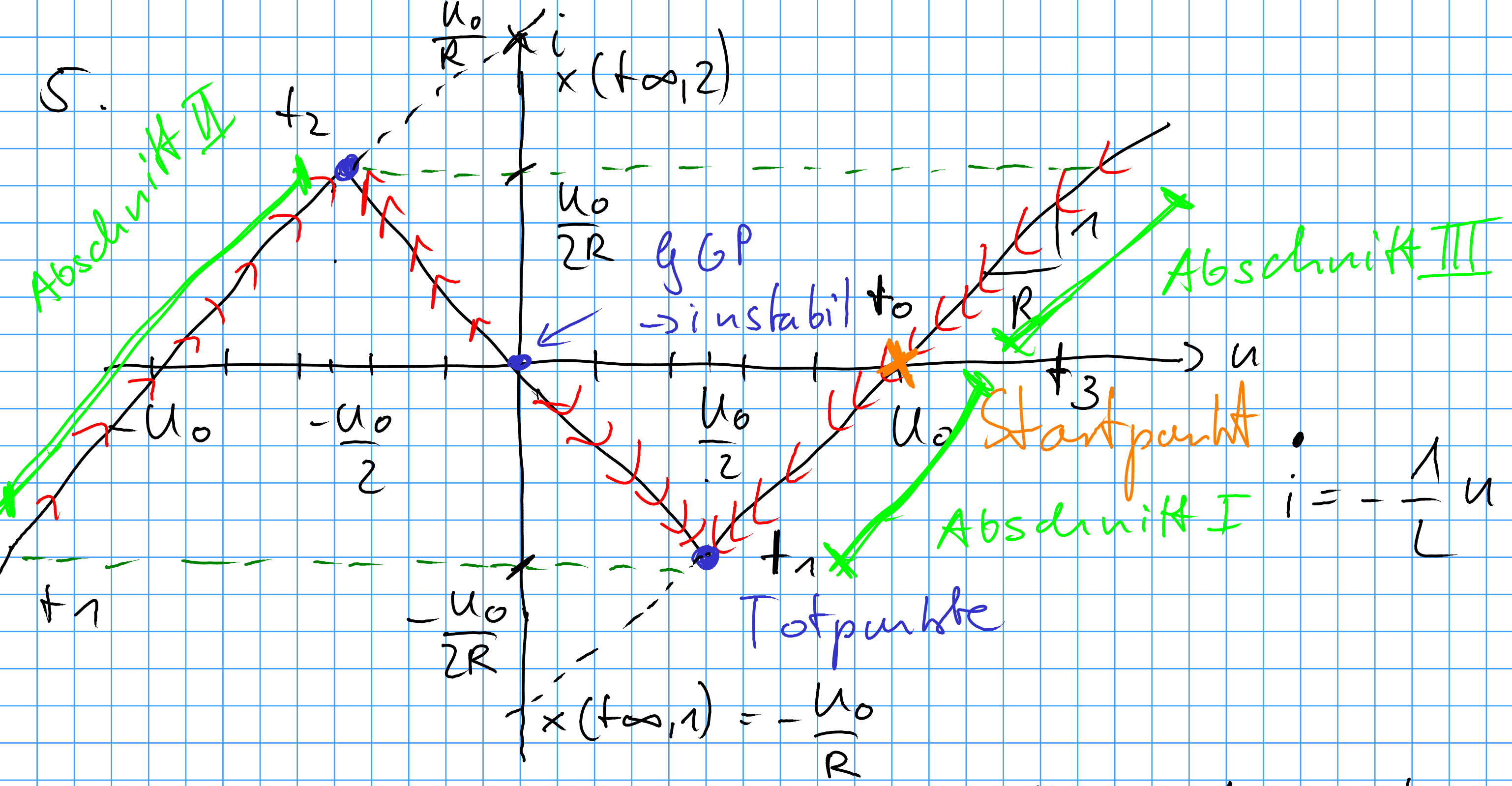
   $\Rightarrow \phi_L = \phi_0 \arcsin\left(\frac{i_L}{I_0}\right)$

4. $u = u_L = \frac{d\phi_L}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\phi_0 \arcsin\left(\frac{i_L(t)}{I_0}\right)\right) =$

   $= \phi_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{i_L(t)}{I_0}\right)^2}} \cdot \frac{1}{I_0} \cdot \dot{i}_L$

   $= \phi_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{i(t)}{I_0}\right)^2}} \cdot \frac{(-\dot{i})}{I_0}$

5.




6. kein harmonischer Oszillator (mind. 2 Reaktanzen notwendig)

hier: Relaxationsoszillator

7. Anfangspunkt: $i_L(t_0 = 0s) = 0A$

$u_L(t_0) = U_0$

allg. Lösung: $x(t) = x(t_\infty) + [x(t_0) - x(t_\infty)]e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$

$\tau = GL = 1S \cdot 1mH = 1ms$

1. Abschnitt: $i = \frac{1}{R}(u - U_0) + 0 =$

$= \frac{1}{R}(u - U_0)$

$$i_L(t_{\infty,1}) = -i\big|_{u=0} = +\frac{U_0}{R}$$

$$\boxed{i_L(t) = \frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}} = 5A - 5A e^{-t/\tau}$$

$$u_L = L\frac{di_L(t)}{dt} = L\frac{U_0}{R\,\tau} e^{-t/\tau} = \frac{GL}{\tau} U_0 e^{-t/\tau}$$

$$= U_0 e^{-t/\tau}$$

$$i_L(t_1) = +\frac{U_0}{2R} \qquad i\big|_{u=\frac{U_0}{2}} = -\frac{U_0}{2R}$$

$$\frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau} = +\frac{U_0}{2R}$$

$$-\frac{U_0}{R} e^{-t/\tau} = -\frac{U_0}{2R} \qquad \Big|:U_0 \Big| \cdot R \Big| \ln$$

$$t_1 = \ln 2\,\tau \approx 0{,}693\,\text{ms}$$

## <u>2. Abschnitt</u>

$$i(t_1) = -\frac{U_0}{2R}$$

$$i = \frac{1}{R}(u + U_0) = \frac{u}{R} + \frac{U_0}{R}$$

$$i_L(t_{\infty,2}) = -i\big|_{u=0} = -\frac{U_0}{R}$$

$$i_L(t) = -\frac{u_0}{R} + \left[+\frac{u_0}{2R} + \frac{u_0}{R}\right] e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} =$$

$$= -\frac{u_0}{R} + \frac{3u_0}{2R} e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}$$

$$= -5V + 7{,}5V e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}$$

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{3u_0 L}{2R}\left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} =$$

$$= -\frac{3u_0 L}{2R\tau} e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} = -\frac{3}{2}u_0 e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}$$

$$i_L(t_2) \stackrel{!}{=} -\frac{u_0}{2R}$$

$$-\frac{u_0}{R} + \frac{3u_0}{2R} e^{-\frac{t_2-t_1}{\tau}} = -\frac{u_0}{2R}$$

$$\frac{3u_0}{2R} e^{-\frac{t_2-t_1}{\tau}} = \frac{u_0}{2R}$$

$$e^{-\frac{t_2-t_1}{\tau}} = \frac{1}{3}$$

$$t_2 = \ln 3\,\tau + t_1$$

<u>Abschnitt 3</u> $\quad i_L(t_2) = -\frac{u_0}{2R}$

$$i_L(t) = +\frac{u_0}{R} + \left[-\frac{u_0}{2R} - \frac{u_0}{R}\right] e^{-\frac{t-t_2}{\tau}}$$

$$= \frac{u_0}{R} - \frac{3u_0}{2R} e^{-\frac{t-t_2}{\tau}}$$

$$= 5V - 7{,}5V e^{-\frac{t-t_2}{\tau}}$$

$$i_L(t) \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{U_0}{R} - \frac{3U_0}{2R} e^{-\frac{t_3-t_2}{\tau}} = 0$$

$$-\frac{3U_0}{2R} e^{-\frac{t-t_2}{\tau}} = -\frac{U_0}{R}$$

$$e^{-\frac{t-t_2}{\tau}} = \frac{2}{3}$$

$$t_3 - t_2 = \ln\frac{3}{2}\tau$$

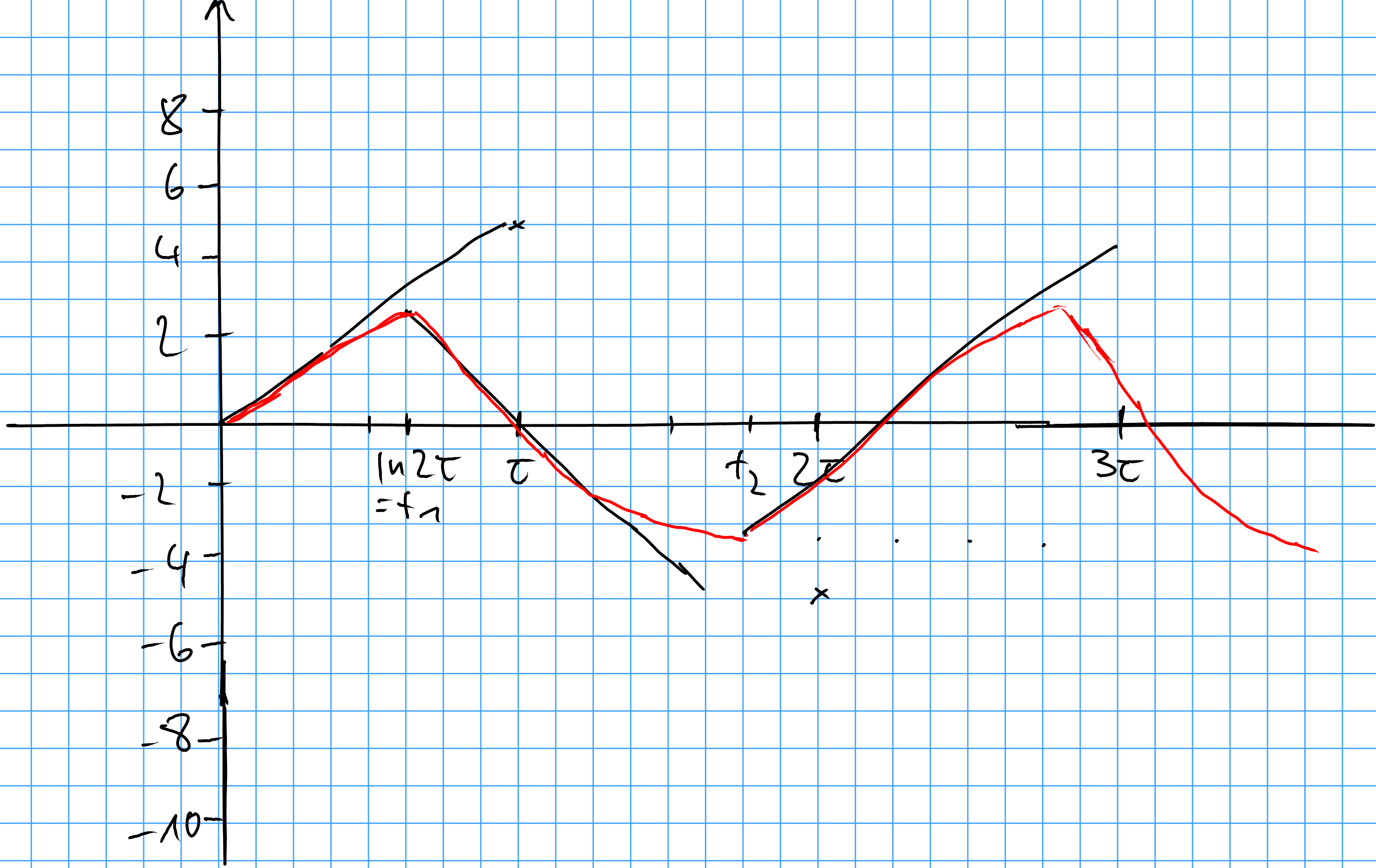
$$t_3 = \ln\frac{3}{2}\tau + t_2$$

$$= \ln\frac{3}{2}\tau + \ln 3\tau + \ln 2\tau = \underline{\underline{2\ln 3\tau}}$$

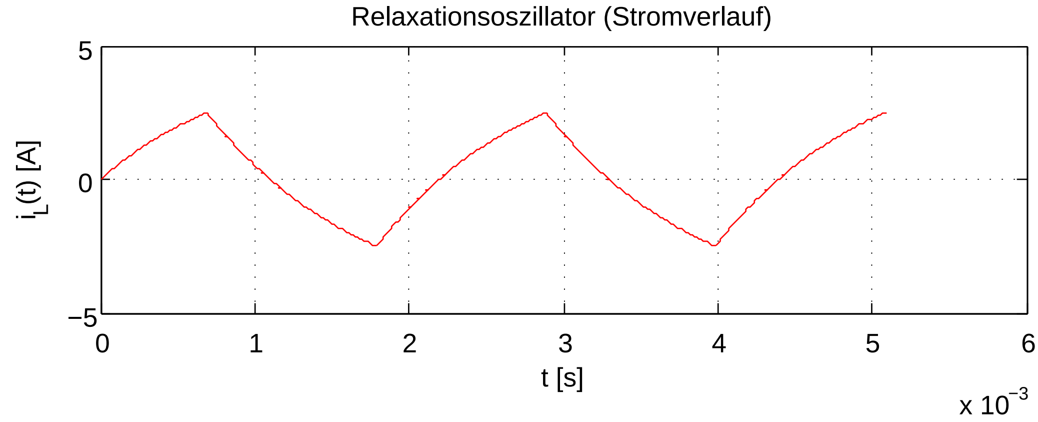
8. Oszillationsfrequenz: $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\ln 3\tau} =$

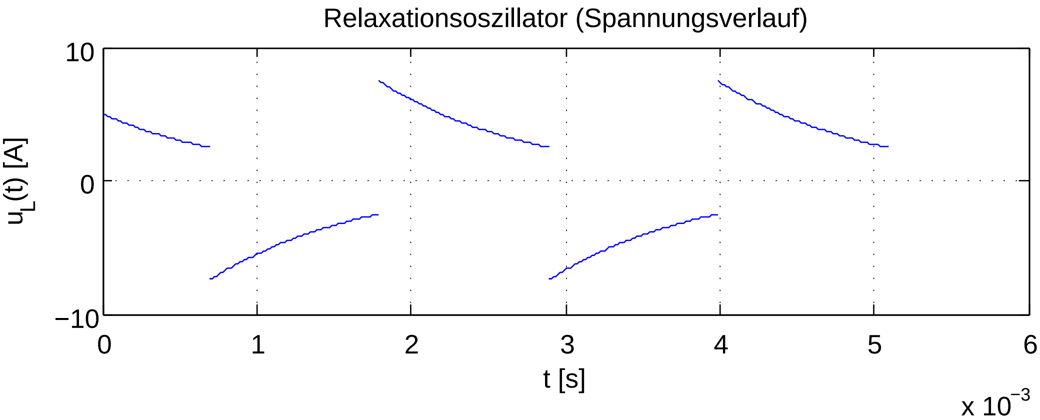
$$= \frac{1}{2{,}197\,\text{ms}} = 455{,}12\,\text{Hz}$$

Skizze des Verlaufs von $i_L(t)$:




Hilfsmittel zum Zeichnen: Tangente durch $(t_0, x(t_0))$ und $(t_0+\tau, x(t_0))$


Relaxationsoszillator (Stromverlauf)
i_L(t) [A]
5
0
−5
0
1
2
3
4
5
6
t [s]
x 10^−3


Relaxationsoszillator (Spannungsverlauf)
u_L(t) [A]
10
0
−10
0
1
2
3
4
5
6
t [s]
x 10^−3