Gegeben sei nun das zu $U_1$ gehörige, sinusförmige Signal $u_1(t) = \sqrt{2}\mathrm{V}\cos(\omega t - \frac{\pi}{4})$.

d)* Welchen Zeiger $U_1$ ordnen Sie $u_1(t)$ zu?

Die Übertragungsfunktion des Tiefpasses aus Bild 6 hat bei $\omega = \frac{1}{RC}$ den Betrag $|H_1(\mathrm{j}\frac{1}{RC})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und die Phase $\varphi_1(\frac{1}{RC}) = -\frac{\pi}{4}$. Die Übertragungsfunktion des Hochpasses aus Bild 7 hat bei $\omega = \frac{1}{RC}$ den Betrag $|H_2(\mathrm{j}\frac{1}{RC})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und die Phase $\varphi_2(\frac{1}{RC}) = \frac{\pi}{4}$. Rechnen Sie im Folgenden mit $\omega = \frac{1}{RC}$.

e) Wie lauten daher die Zeiger $U_2$ und $U_3$ und die zugehörigen, sinusförmigen Signale $u_2(t)$ und $u_3(t)$? Vereinfachen Sie $U_2$ und $U_3$ soweit es geht.

**Hinweis:** $\exp(\mathrm{j}x) = \cos(x) + \mathrm{j}\sin(x)$

$$\left.\begin{aligned} U_2 &= e^{-j\frac{\pi}{2}}\,V = -jV \\ U_3 &= 1V \end{aligned}\right\}$$ Ergebnisse von letzter Stunde

Mit Quadraturphasenmodulation können zu einem Zeitpunkt zwei Bits, $b_0$ und $b_1$, gleichzeitig mit einem Zeiger dargestellt werden. Ein Bit wird auf den Realteil und ein Bit auf den Imaginärteil des Zeigers abgebildet. Das Vorzeichen des Real- bzw. Imaginärteils entscheidet über den Wert eines Bits.

Der mit Quadraturphasenmodulation modulierte Zeiger $U_4$ entsteht aus der Summe von $U_2$ und $U_3$ jeweils mit $1$ oder $-1$ multipliziert:

$$U_4 = b_0 U_2 + b_1 U_3,$$

wobei $b_0 \in \{-1, +1\}$ und $b_1 \in \{-1, +1\}$ jeweils ein Bit darstellen.

☐ f) Wird $b_1$ auf den Real- oder Imaginärteil von $U_4$ abgebildet? Begründen Sie Ihre Antwort.

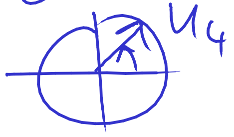
$U_4 = -j b_0 V + b_1 \cdot 1V$

$\Rightarrow$ $b_1$ wird auf den Realteil abgebildet

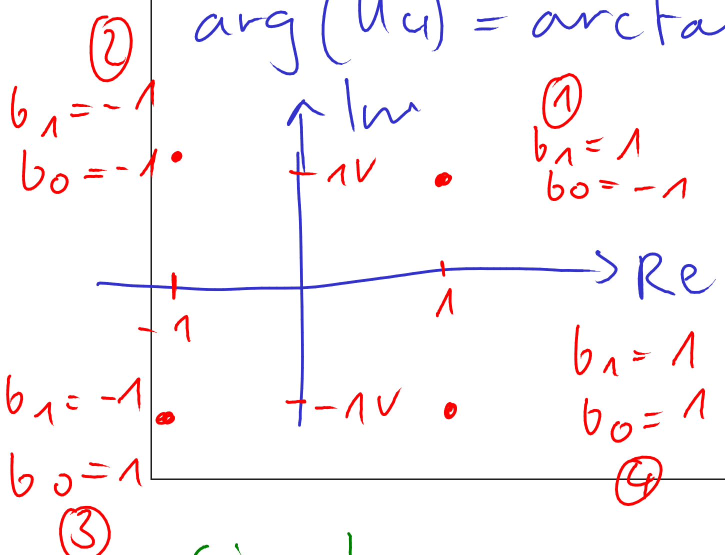
☐ g) Berechnen Sie Betrag und Phase von $U_4$ für die vier möglichen Kombinationen von $b_0$ und $b_1$.

$|U_4| = \sqrt{(b_0 \cdot 1V)^2 + (b_1 \cdot 1V)^2} = \sqrt{2}$

↳ Hinweis: geometrischer Ort von $U_4$ ist ein Kreis




$\arg(U_4) = \arctan\left(\frac{-b_0}{b_1}\right) (+\pi)$ ← je nachdem welcher Quadrant




$U_4 = b_1 - j b_0$

① $\arg(U_4) = \frac{\pi}{4}$

② $\arg(U_4) = \frac{3}{4}\pi$

③ $\arg(U_4) = \frac{5}{4}\pi$

④ $\arg(U_4) = \frac{7}{4}\pi \mathrel{\hat{=}} -\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow$ Signalraumkonstellation

Aus dem Zeiger $\underline{U}_4$ soll nun durch eine schaltungstechnische Realisierung das Bit $b_1$ zurückgewonnen werden.

h)* Berechnen Sie für den komplexen Zeiger $\underline{U}_4$ das zugehörige Signal $u_4(t)$ in Abhängigkeit des Real- und Imaginärteils von $\underline{U}_4$.

$$U_4 = b_1 - jb_0 = b_1 + e^{-j\frac{\pi}{2}} b_0$$
$$u_4(t) = \mathrm{Re}(U_4 e^{j\omega t}) = \mathrm{Re}(b_0 e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} + b_1 e^{j\omega t})$$
$$= 1V \cdot b_0 \sin(\omega t) + 1V \cdot b_1 \cos(\omega t)$$

Um an die Information $b_1$ zu kommen, wird in einem ersten Schritt $u_4(t)$ mit $\cos(\omega t)$ multipliziert.

i) Berechnen Sie nun $u_5(t) = u_4(t)\cos(\omega t)$ in Abhängigkeit des Real- und Imaginärteils von $\underline{U}_4$. Lösen sie alle Multiplikationen der trigonometrischen Funktionen zu Summen auf.
**Hinweis:** $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$, $\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$

$$u_4(t)\cos(\omega t) = [1V b_0 \sin(\omega t) + 1V b_1 \cos(\omega t)] \cos(\omega t)$$
$$= 1V b_0 \frac{1}{2}(\sin(0) + \sin(2\omega t))$$
$$+ 1V b_1 \frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega t)) =$$
$$= \frac{1V}{2} b_0 \sin(2\omega t) + 1V b_1 \cdot \frac{1}{2}(1) + \cos(2\omega t))$$

$\Rightarrow$ Demodulation

j)* Mit welcher Schaltung können Sie aus $u_5(t)$ ein Signal herausfiltern, welches nur noch den konstanten, informationstragenden Anteil enthält?

$\Rightarrow$ Tiefpass

ST 2 TÜ, Blatt 11 – 19. 7. 2011

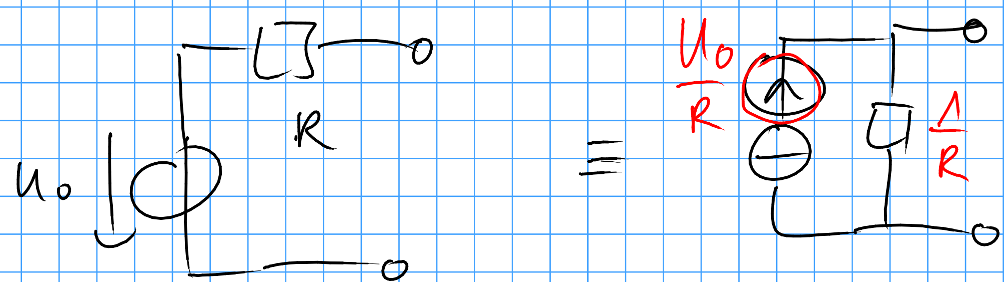
## Komplexe Wechselstromrechnung / Knotenspannungsanalyse

$$\underline{i}_q = \underset{\sim}{\underline{Y}_K}\, \underline{u}_K$$

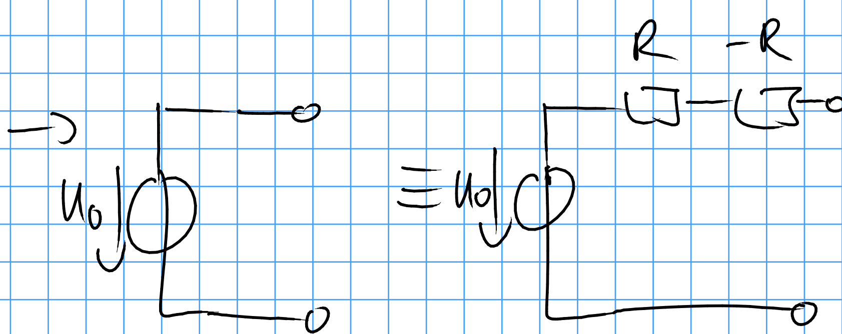
### 1. Vorbereiten der Schaltung

→ Ersetzen von nicht-spannungsgesteuerten Elementen

D



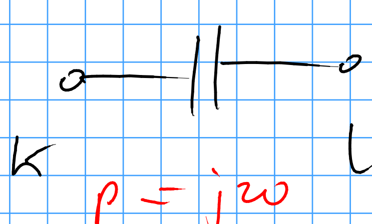

D




→ Vorgehen wie oben

D Gyrator

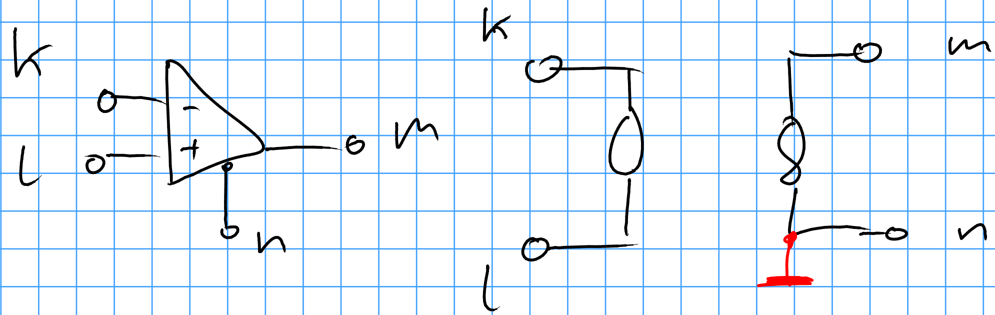
– Eintragen von Bauelementen (K) … (L)




$$\underset{\sim}{Y_K} = \begin{array}{c} (K) \\ \vdots \\ (L) \end{array} \begin{pmatrix} j\omega C & -j\omega C \\ & \\ -j\omega C & j\omega C \end{pmatrix}$$

Spule: analog

OpAmp: linearer Bereich
↳ Nullor-Ersatzschaltbild




Nullator: Spalten (k), (l) addiert, Ergebnis in Spalte (k), Spalte (l) löschen
$\underline{u}_k$ anpassen: $u_{k,l}$ entfernen

Norator: Zeile (m), (n) addieren, Ergebnis in (m), Zeile n entfernen
Für Spezialfall ein Knoten (n) auf Masse: Zeile (m) komplett löschen
$\underline{i}_q$ anpassen: $i_{q,n}$ entfernen

Übertragungsfunktion: $H(j\omega) = \frac{U_A}{U_E}$

$U_A = u_{k,l}$

$$\underline{i}_q = \underset{\sim}{Y}_K \, \underline{u}_K$$

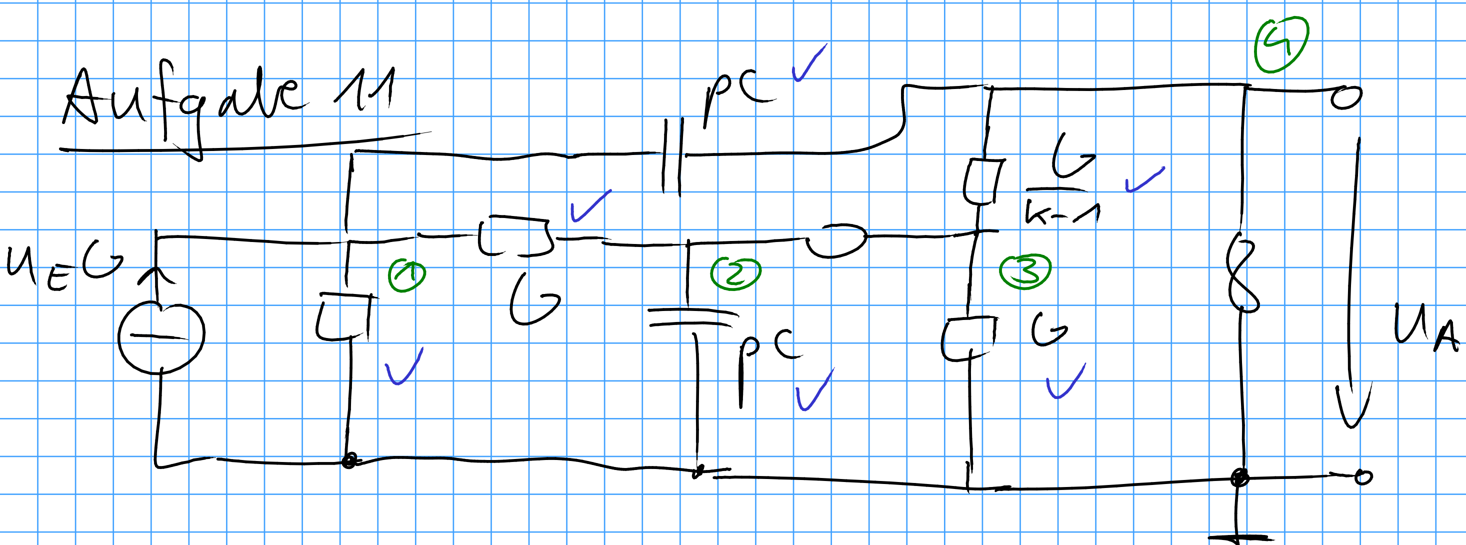
$$\underline{u}_K = \underset{\sim}{Y}_K^{-1} \, \underline{i}_q$$ 1. Möglichkeit

Sinnvoller: Regel v. Cramer

$$u_{K,i} = \frac{\det(Y_{K,i})}{\det(Y_K)}$$

$\underline{Y}_{K,i}$ : Matrix, die man erhält, wenn man die Spalte i durch $\underline{i}_q$

## Aufgabe 11




1. s.o.

2. $$\underline{i}_q = \begin{pmatrix} u_E G \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.

$$\underset{\sim}{Y}_k = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \\ 4 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \quad 1 \quad & \quad 2 \quad & \quad 3 \quad & \quad 4 \quad \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c} G+G+pC & -G & & -pC \\ \hline -G & G+pC & & \\ \hline & & G+G(k-1)^{-1} & -G(k-1)^{-1} \\ \hline -pC & & -G(k-1)^{-1} & pC+G(k-1)^{-1} \end{array}\right) \end{array}$$

(2)+(3)

$$= \begin{pmatrix} 2G+pC & -G & 0 & -pC \\ -G & G+pC & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G+\frac{G}{k-1} & -\frac{G}{k-1} \\ \cancel{-pC} & \cancel{0} & \cancel{-\frac{G}{k-1}} & \cancel{pC+\frac{G}{k-1}} \end{pmatrix}$$

Exkurs: Entwicklung einer Determinante

z.B. $\underset{\sim}{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \\ f & g & h \end{pmatrix}$

Entwickeln nach der dritten Spalte

$$(-1)^{3+1} \cdot c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ f & g \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot h \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

$$\underset{\sim}{Y_k} = \begin{pmatrix} 2G+pC & -G & -pC \\ -G & G+pC & 0 \\ 0 & G+\frac{G}{k-1} & -\frac{G}{k-1} \end{pmatrix} \quad \Bigg\| \quad \begin{pmatrix} u_{k1} \\ u_{k2} \\ u_{k4} \end{pmatrix}$$

5. $$H(p) = \frac{U_A}{U_E} \qquad U_A = u_{k4}$$

$$U_A = \frac{\det(Y_{k,4})}{\det(\underset{\sim}{Y_k})}$$

$$\det(\underset{\sim}{Y_k}) = -pC \begin{vmatrix} -G & G+pC \\ 0 & G+\frac{G}{k-1} \end{vmatrix} - \frac{G}{k-1} \begin{vmatrix} 2G+pC & -G \\ -G & G+pC \end{vmatrix}$$

$$= pCG^2\frac{k}{k-1} - \frac{G}{k-1}\left(G^2+3pCG+p^2C^2\right)$$

$$\det(Y_{k,4}) = \begin{vmatrix} 2G+j\omega C & -G & U_E G \\ -G & G+pC & 0 \\ 0 & G\frac{k}{k-1} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -U_E \frac{G^3 k}{k-1}$$

$$H(p) = \frac{G^2 k}{G^2 + p(3CG - CGk) + p^2C^2} = \frac{U_A}{U_E}$$

6. $k = 1$

$\Rightarrow$ Nenner: $p^2C^2 + 2pCG + G^2 \overset{!}{=} 0$

$(pC + G)^2 = 0 \Rightarrow p_{1|2} = -\frac{G}{C}$

$= -\frac{1}{RC}$

7. $H(0) = \frac{G^2 k}{G^2} = k = 1$

$\lim_{p \to \infty} H(p) = 0$

$\Rightarrow$ Tiefpass-charakteristik