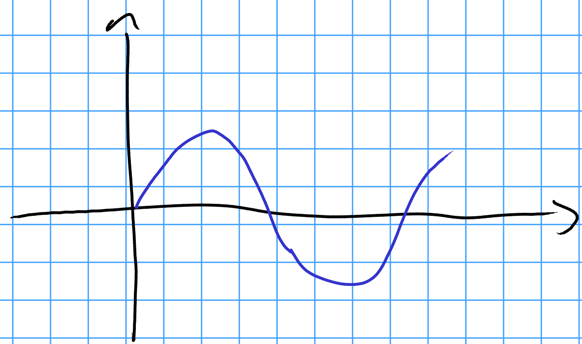
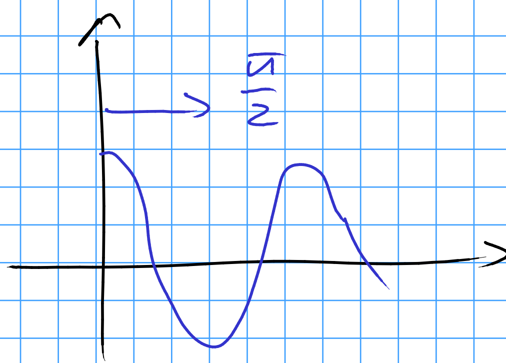
ST2 - Tutorübung, Blatt 9/10, 12.07.2011

Fortführung: Teilaufgabe 5

$$u_e(t) = \hat{U}_e \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$





$$\sin(\omega t) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$u_e(t) = \hat{U}_e \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = \hat{U}_e \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\underline{U}_e = \hat{U}_e\, e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

6. $$\underline{U}_a = \underline{U}_e \cdot H(j\omega) = \frac{1V}{\sqrt{2}} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1V}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{11}{12}\pi\right)$$

7. $$\dot{\underline{x}} = \underset{\sim}{A}\,\underline{x} + \underline{b}\, u_e(t)$$

Erinnerung: $\frac{d}{dt} x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ j\omega X(\omega)$

$$j\omega\,\underline{x}(\omega) = \underset{\sim}{A}\,\underline{x}(\omega) + \underline{b}\,U_e$$

$$\left(j\omega\,\underset{\sim}{E} - \underset{\sim}{A}\right)\underline{x}(\omega) = \underline{b}\,U_e$$

$$\underline{x}(\omega) = \left(j\omega\,\underset{\sim}{E} - \underset{\sim}{A}\right)^{-1}\underline{b}\,U_e$$

Aufgabe 1 Analyse einer Schaltung 2. Grades (20 Punkte)

Folgende dynamische Schaltung 2. Grades soll in dieser Aufgabe analysiert werden.

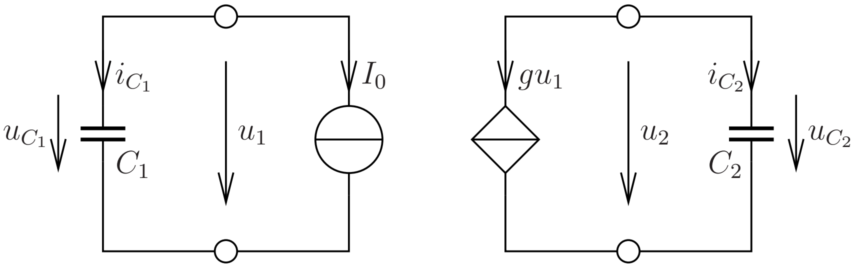


Bild 1. Schaltung 2. Grades

a)* Geben Sie die Zustandsvariablen der Schaltung in Bild 1 an.

$u_1 = u_{C1}$
$u_2 = u_{C2}$

b)* Stellen Sie die Zustandsgleichung $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}v(t)$ für die Schaltung in Bild 1 auf. (Geben Sie auch die Zwischenschritte der Herleitung an.)

$$\dot{u}_1 = \frac{1}{C_1} i_1 = -\frac{1}{C_1} I_0$$

$$\dot{u}_2 = \frac{1}{C_2} i_2 = -\frac{1}{C_2} g u_1$$

$$\underset{\sim}{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{g}{C_2} & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} -\frac{I_0}{C_1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Wie lauten die zu $\boldsymbol{A}$ gehörigen Eigenwerte?

$$\det(\lambda \underset{\sim}{E}_2 - A) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \overset{!}{=} 0$$

$$\lambda_{1/2} = 0$$

Wichtig:
$x_1(t=0) = x_{01}$
$x_2(t=0) = x_{02}$

d) Berechnen Sie die Lösung für den Zustandsvektor $\boldsymbol{x}(t)$.
Hinweis: Verwenden Sie x_{01} und x_{02} für die Anfangswerte des Zustandsvektors.

1. Gleichung: $\frac{d}{dt} x(t) = a$
$\Rightarrow x(t) = a \cdot t + C$

$\Rightarrow x_1(t) = -\frac{I_0}{C_1} \cdot t + x_{01}$

$\Rightarrow \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{C_2} \cdot x_1(t) = \frac{g I_0}{C_1 C_2} t - \frac{g}{C_2} x_{01}$

Stamm-fkt. suchen

$x_2(t) = \frac{1}{2} \frac{g I_0}{C_1 C_2} t^2 - \frac{g x_{01} \cdot t}{C_2} + x_{02}$

$\Rightarrow$ Übung: gleiche Lösung mit Jordan

e) Geben Sie einen Ausdruck für x_2 in Abhängigkeit von x_1Drücken an, wenn $C_1 = C_2$.
Hinweis: Eliminieren Sie t.

$\Rightarrow$ ges: $x_2(x_1)$
Lös: $t = (x_1 - x_{01}) \cdot \left(\frac{-C_1}{I_0}\right)$

$\Rightarrow x_2(t) = \frac{1}{2} \frac{g \cancel{I_0}}{C^2} \cdot \frac{C^2}{I_0^{\cancel{2}}} (x_1 - x_{01})^2 + \frac{g x_{01}}{\cancel{C}} \cdot \frac{\cancel{C}}{I_0} (x_1 - x_{01}) + x_{02}$

$= \frac{1}{2} \frac{g}{I_0} (x_1 - x_{01})^2 + \frac{g x_{01}}{I_0} (x_1 - x_{01}) + x_{02}$

Für $I_0 = C_1 \cdot \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}}$ und eine bestimmte Wahl von g ergibt sich der Zusammenhang

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_{01})^2 \frac{1}{\mathrm{V}} + x_{01}(x_1 - x_{01}) \frac{1}{\mathrm{V}} + x_{02}. \tag{1}$$

f)* Zeichnen Sie das Phasenportrait der Schaltung aus Bild 1, ausgehend von Gleichung (1).

man erkennt: Phasenportrait muss eine Parabel sein

$$x_2\big|_{x_{01}=0} = \frac{1}{2} x_1^2 \frac{1}{V} + x_{02}$$

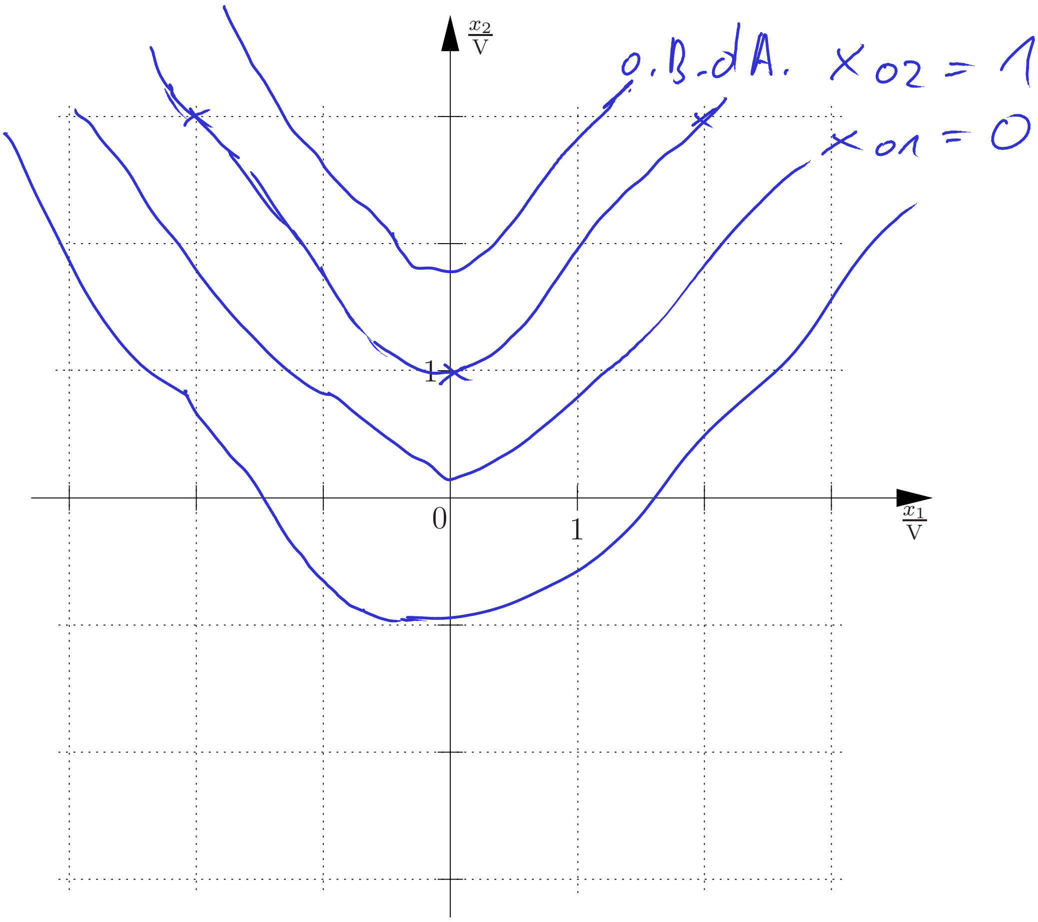


Bild 2. Lösung der Differentialgleichung

Aufgabe 3 Quadraturphasenmodulation (33 Punkte)

In dieser Aufgabe wird anhand der komplexen Wechselstromrechnung die Funktionsweise der Quadraturphasenmodulation erarbeitet.

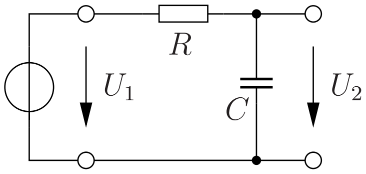


Bild 6. RC-Tiefpass

a)* Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $H_1(\mathrm{j}\omega) = \frac{U_2}{U_1}$ des Tiefpasses aus Bild 6.

⇒ Spannungsteiler

$$U_2 = U_1 \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = U_1 \cdot \frac{1}{1+j\omega RC}$$

$$= U_1 \cdot \frac{1-j\omega RC}{1+(\omega RC)^2}$$

b) Geben Sie nun die Phase $\varphi_1(\omega)$ der Übertragungsfunktion $H_1(\mathrm{j}\omega)$ an.

$$\arg(H(j\omega)) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(H(j\omega))}{\mathrm{Re}(H(j\omega))}\right)(\pm\pi) =$$

$$= \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1}\right)(\pm\pi) =$$

$$= -\arctan(\omega RC)(\pm\pi)$$

Für $\omega = \frac{1}{RC}$ ergibt sich damit $\varphi_1(\frac{1}{RC}) = -\frac{\pi}{4}$

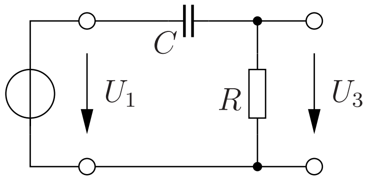


Bild 7. RC-Hochpass

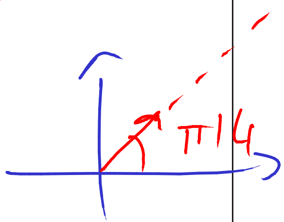
☐ c)* Erklären Sie, warum die Übertragungsfunktion $H_2(j\omega) = \frac{U_3}{U_1}$ des Hochpasses aus Bild 7 bei $\omega = \frac{1}{RC}$ eine Phase von $\varphi_2(\frac{1}{RC}) = +\frac{\pi}{4}$ hat.

$$U_3 = U_1 \cdot \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = U_1 \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

$$= U_1 \cdot \frac{j\omega RC(1 - j\omega RC)}{1 + (\omega RC)^2}$$

$$= U_1 \cdot \frac{j\omega RC + (\omega RC)^2}{1 + (\omega RC)^2}$$

$j+1$



$$\arg(U_3) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(U_3)}{\mathrm{Re}(U_3)}\right)(+\pi) =$$

$$= \arctan(\omega RC)(+\pi)$$

$$\arg(U_3)\Big|_{\omega = \frac{1}{RC}} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

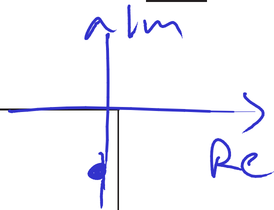
Gegeben sei nun das zu U_1 gehörige, sinusförmige Signal $u_1(t) = \sqrt{2}\text{V}\cos(\omega t - \frac{\pi}{4})$.

d)* Welchen Zeiger U_1 ordnen Sie $u_1(t)$ zu?

$U_1 = \sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$

Die Übertragungsfunktion des Tiefpasses aus Bild 6 hat bei $\omega = \frac{1}{RC}$ den Betrag $|H_1(\text{j}\frac{1}{RC})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und die Phase $\varphi_1(\frac{1}{RC}) = -\frac{\pi}{4}$. Die Übertragungsfunktion des Hochpasses aus Bild 7 hat bei $\omega = \frac{1}{RC}$ den Betrag $|H_2(\text{j}\frac{1}{RC})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und die Phase $\varphi_2(\frac{1}{RC}) = \frac{\pi}{4}$. Rechnen Sie im Folgenden mit $\omega = \frac{1}{RC}$.

e) Wie lauten daher die Zeiger U_2 und U_3 und die zugehörigen, sinusförmigen Signale $u_2(t)$ und $u_3(t)$? Vereinfachen Sie U_2 und U_3 soweit es geht.
Hinweis: $\exp(\text{j}x) = \cos(x) + \text{j}\sin(x)$



$U_2 = H_1(j\omega) \cdot U_1 \Big|_{\omega = 1/RC} = |H_1(j\omega)| \cdot e^{j\varphi_1} \cdot U_1$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot \sqrt{2}\,V e^{-j\frac{\pi}{4}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -jV$

$\cos(-\frac{\pi}{2}) + j\sin(-\frac{\pi}{2})$

$U_3 = H_2(j\omega) \cdot U_2 \Big|_{\omega = 1/RC} = |H_2(j\omega)| e^{j\varphi_2} \cdot U_1 =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot \sqrt{2}\,V e^{-j\frac{\pi}{4}} = \underline{1V}$

$\Rightarrow$ nächste Stunde