

REPETITORIUM UND FORMELSAMMLUNG

SCHALTUNGSTECHNIK

TEIL 2



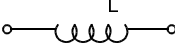
© 2000-01 Michael Rosnitschek

www.eikon.tum.de/~miro/

Diese Formelsammlung basiert auf dem Skript Schaltungstechnik und dem Repetitorium des „AK Überleb' die ST DVP (1993)“ der Fachschaft EI. Alle Angaben ohne Gewähr.

Die Anfertigung von Kopien ist nur für den Eigenbedarf gestattet. Der Verkauf ist untersagt! Jeder Student oder Tutor der diese Formelsammlung verwendet, ist moralisch dazu verpflichtet, dem Autor eine email mit Fehlerkorrekturen und Ergänzungsmöglichkeiten zu senden.

Reaktive Netzwerkelemente

	allgemein	linear	komplex
Kapazität  $[C] = \frac{C}{V} = \frac{As}{V} = F$ $[Q] = C = As$	$q(t) = q_0 + \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau$ $i(t) = \frac{\partial q(t)}{\partial t} = \dot{q}$	$q(t) = C u(t)$ $i(t) = C \dot{u}(t)$	$I = Y U$ $Z = \frac{1}{j \omega C}$ $Y = j \omega C$
Induktivität  $[L] = \frac{Wb}{A} = \frac{Vs}{A} = H$ $[\Phi] = Wb = Vs$	$\phi(t) = \phi_0 + \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$ $u(t) = \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = \dot{\phi}$	$\phi(t) = L i(t)$ $u(t) = L \dot{i}(t)$	$U = Z I$ $Z = j \omega L$ $Y = \frac{1}{j \omega L}$

- Kapazität des Plattenkondensators: $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$

- Memristor: $u_M(t) = \dot{\phi}(t)$ $i_M(t) = \dot{q}(t)$

Energiebetrachtungen:

- ideale Reaktanzen sind verlustlos. Außer ihre Kennlinie ermöglicht zwei verschiedene Wege um von einem Punkt. P_1 zu P_2 zu gelangen. (Hysterese - Kennlinie)

- im stationären Fall ist der Leistungsfluß Null. $u(t) = const$ $i(t) = const \Rightarrow i = \partial q / \partial t = 0 \Rightarrow p = u \cdot i = 0$

- Energieänderung: $W_C(t_1, t_2) = W_C(q_1, q_2) = \int_{q_1}^{q_2} u(q) dq = \frac{1}{2C} (q_2^2 - q_1^2) = \frac{C}{2} (u_2^2 - u_1^2)$ Flächen abschnittsweise berechnen!

- gespeicherte Energie: $E_C(q_1) = E_C(u_1) = \frac{1}{2C} q_1^2 = \frac{1}{2} C u_1^2$ $E_L(\phi_1) = E_L(i_1) = \frac{1}{2L} \phi_1^2 = \frac{1}{2} L i_1^2$

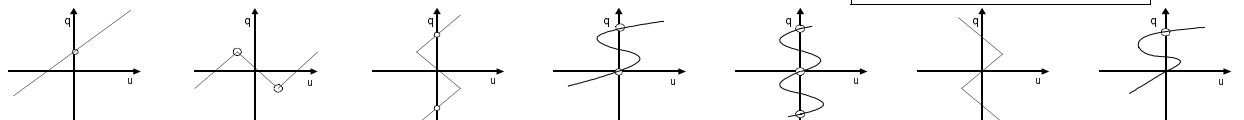
- Relaxpunkte: (Ruhepunkte) energetisch tiefste Punkte der Kennlinie

Kandidaten für Relaxpunkte: Knick, Wendestelle (Sinus), Schnittpunkt mit Koordinatenachse

- Energiebilanz: $W_C > 0 \Leftrightarrow q$ steigt und $u > 0$ oder q fällt und $u < 0$

Für L: q durch Φ und u durch i ersetzen

Beispiele für Relaxationspunkte bei C:



wegen Symmetrie

$W_C > 0 \Rightarrow$ System nimmt Energie auf

Kein RP; Kennlinie verläuft im II u. IV Qdr. Energie beliebig groß

Ursprung kein symmetrisch!

Mehrfachcharakter der Netzwerkelemente: $f_R(u, i) = 0$; $f_C(u, q) = 0$; $f_L(i, \Phi) = 0$; $f_M(\Phi, q) = 0$

- Nullator, Norator, Leerlauf und Kurzschluss sind Kapazitiv, induktiv, resistiv und memristiv

- Spannungsquellen sind resistiv und kapazitiv

- Stromquellen sind resistiv und induktiv

Zusammenschaltung reaktiver Eintore:

- Parallelschaltung: Funktionsaddition in der $u-q$ -Ebene $C_p = C_1 + C_2$ $U_C = U_1 = U_2$ $L_p = L_1 \parallel L_2 = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$ $i_L = i_1 + i_2$

- Serienschaltung: Funktionsaddition in der $q-u$ -Ebene $C_s = C_1 \parallel C_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ $U_C = U_1 + U_2$ $L_s = L_1 + L_2$ $i_L = i_1 = i_2$

- In einem rein kapazitiven oder rein induktiven Netzwerken kann man rechnen wie bei einem resistiven Netzwerk gleicher Struktur, wenn man C wie G und L wie R behandelt.

Umwandlung resistiver Beschreibung in reaktive Beschreibungsform:

- Bedingungen: - implizite resistive Beschreibung $f_R(u, i) = 0$ zerfällt in zwei unabhängige

Funktionen $f_1(u) = 0$ und $f_2(i) = 0$

- eine der zwei Funktionen muß streng linear sein! $f_1(u) = M u \stackrel{!}{=} 0$ oder $f_2(i) = N i \stackrel{!}{=} 0$

- durch Integration über die Zeit erhält man: $f_1(\phi) = M \phi = 0$ bzw. $f_2(q) = N q = 0$

Reaktive Beschreibung $f_C(u, q) = \begin{bmatrix} f_1(u) \\ f_2(q) \end{bmatrix} = 0$ bzw. $f_L(i, \phi) = \begin{bmatrix} f_1(\phi) \\ f_2(i) \end{bmatrix} = 0$

Dualwandlung zwischen Reaktanzen:

Kapazität und Induktivität sind zueinander duale Klassen von Eintoren.

$$q = \frac{1}{R_d} \phi$$

$$u = i \cdot R_d$$

$$C = \frac{L}{R_d^2}$$

$$\phi = q R_d$$

$$i = \frac{u}{R_d}$$

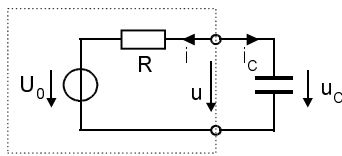
$$L = C R_d^2$$

Schaltungen ersten Grades

Lineare zeitinvariante Schaltung:

Eintorbeschaltung mit Helmholtz / Thévenin (C) bzw.

Mayer / Norton (L) :

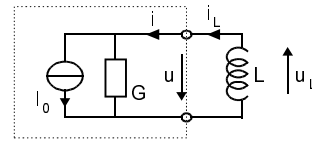


$$i_C = -i$$

$$i_C = C \cdot \dot{u}_C$$

$$u_C(t_\infty) = U_0$$

Zeitkonstante $\tau = R \cdot C$



$$u_L = -u$$

$$u_L = L \cdot \dot{i}_L$$

$$i_L(t_\infty) = I_0$$

Zeitkonstante $\tau = G \cdot L$

Aus Graph ablesen: - Aus der Steigung des Graphen: $R = \frac{\Delta u}{\Delta i}$ bzw. $G = \frac{\Delta i}{\Delta u}$

- Kennlinie verlängern bis zum Schnittpunkt mit der u - bzw. i - Achse $\Rightarrow U_0$ bzw. I_0

C durch LL ersetzen $\Rightarrow u_C(t_\infty) = u$

L durch KS ersetzen $\Rightarrow i_L(t_\infty) = i$

C durch Spannungsquelle $u_C(t_0)$ ersetzen $\Rightarrow u = u(t_0)$

L durch Stromquelle $i_L(t_0)$ ersetzen $\Rightarrow i = i(t_0)$

Strom-, Spannungsverläufe bei konstanter Erregung:

- Differenzialgleichung 1. Grades:

$$\dot{u}_C = \frac{-1}{RC} u_C + \frac{1}{RC} u_0$$

$$\dot{i}_L = \frac{-1}{GL} i_L + \frac{1}{GL} i_0$$

- Lösung:

$$u_C(t) = u_C(t_\infty) + [u_C(t_0) - u_C(t_\infty)] \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)$$

$$i_C(t) = C \left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot [u_C(t_0) - u_C(t_\infty)] \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)$$

$$i_L(t) = i_L(t_\infty) + [i_L(t_0) - i_L(t_\infty)] \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)$$

$$u_L(t) = L \left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot [i_L(t_0) - i_L(t_\infty)] \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right)$$

Stromverlauf bei C, Spannungsverlauf bei L SPRINGT ! (ist unstetig)

$\Rightarrow$ Werte an Intervallgrenze extra berechnen! $i_C-(t_1)$, $i_C+(t_1)$, $u_L-(t_1)$, $u_L+(t_1)$

- Skizze des Zeitverlaufs:

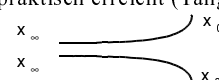
stabiler Fall $\tau > 0$

- Tangente an $x(t)$ in (t_0, x_0) geht durch $(t_0 + \tau, x_\infty)$
- $x(t)$ hat sich nach τ : $0,63 \cdot (x_0 - x_\infty)$ in Richtung x_∞ bewegt
- nach $7 \cdot \tau$ ist x_∞ praktisch erreicht (Tangente)
- $x_\infty > x_0$
- $x_\infty < x_0$



instabiler Fall $\tau < 0$

- Tangente an $x(t)$ in (t_0, x_0) geht durch $(t_0 - |\tau|, x_\infty)$
- Nach $|\tau|$ ist $x(t)$ um $1,72 \cdot |x_0 - x_\infty|$ angewachsen
- $x(t)$ hat sich nach τ : $0,63 \cdot (x_0 - x_\infty)$ in Richtung x_∞ bewegt
- nach $7 \cdot \tau$ ist x_∞ praktisch erreicht (Tangente)
- $x_\infty < x_0$
- $x_\infty > x_0$



$x_\infty = x(t_\infty)$: Gleichgewichtszustand (Fixpunkt)

$x_0 = x(t_0)$: Anfangswert

Strom- und Spannungsverläufe bei allgemeiner Erregung ($u_0(t)$ bzw. $i_0(t)$ sind beliebige Funktionen der Zeit)

$$u_C(t) = u_C(t_0) \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right) + \int_{t_0}^t \frac{1}{\tau} u_0(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt'$$

$$i_L(t) = i_L(t_0) \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau}\right) + \int_{t_0}^t \frac{1}{\tau} i_0(t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt'$$

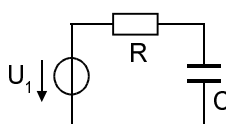
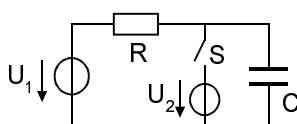
zero input response + zero state response

Lineare Zeitvariante Schaltung:

Schalter wird zum Zeitpunkt T geschlossen

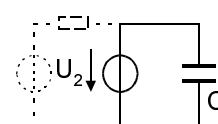
offener Schalter:

geschlossener Schalter:



$$t \in [t_0, T[$$

$$U_C(t_\infty) = U_1$$



$$t \in [T, \infty[$$

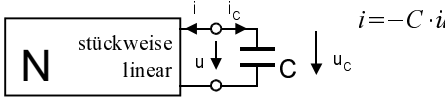
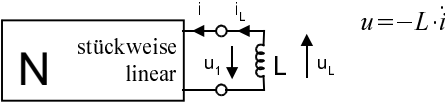
$$U_C(t) = U_2$$

- 2 verschiedene $u(t_\infty)$ und 2 verschiedene τ
- sonst reelle Vorgehensweise wie oben!

Stabilität: passiv $\Rightarrow$ stabil aktiv $\Rightarrow$ instabil (vgl. stückweise lineare Schaltungen)

Stückweise lineare Schaltungen

Dynamischer Pfad:

C	 $i = -C \cdot \dot{u}$	- Kennlinie von N in u-i-Diagramm einzeichnen - GGP einzeichnen: Punkte wo $i=0$ - Richtung des dynamischen Pfades: solange $i > 0 \Rightarrow u$ muß fallen
L	 $u = -L \cdot \dot{i}$	- Kennlinie von N in u-i-Diagramm einzeichnen - GGP einzeichnen: Punkte wo $u=0$ - Richtung des dynamischen Pfades: solange $u > 0 \Rightarrow i$ muß fallen

Zeitdauer um Kennlinie zu durchlaufen (Stückweise Lineare Schaltung)

- einzelne ESBs zeichnen und Gleichungen aufstellen, τ berechnen

- DGL nach t auflösen:

$u(t_0)$ = Startwert

$u(t_1)$ = Endpunkt des Astes

$u(t_\infty)$ = gedachter Schnittpunkt des Astes mit u -Achse.

- nächster Ast: t_1 für t_0 , neues τ , neue $u(t_0)$, $u(t_1)$, $u(t_\infty)$

- Sprünge: - Sprünge kosten keine Zeit

- bei C: Spannung konstant, Strom springt

- bei L: Strom konstant, Spannung springt

- Periodendauer (Relaxationsoszillator): $T = t_3 - t_1$ Frequenz: $f = \frac{1}{T}$

- Symmetrie der Kennlinie ausnutzen: $T = 2 t_2$ $t_1 = t_2$

- Vorsicht: Zählpfeilrichtung beachten! bei C: $i_C = -i$

bei L: $u_L = -u$

$$t_1 = t_0 + \tau \cdot \ln \frac{u_C(t_0) - u_C(t_\infty)}{u_C(t_1) - u_C(t_\infty)}$$

$$\text{bei L: } t_1 = t_0 + \tau \cdot \ln \frac{i_L(t_0) - i_L(t_\infty)}{i_L(t_1) - i_L(t_\infty)}$$

Toter Punkt:

- ist kein Gewichtszustand und es existiert kein Ausweg entlang der Kennlinie

- dynamischer Pfad kann durch Sprungregel fortgesetzt werden:

- bei C: Punkt auf Kennlinie suchen mit gleicher Spannung

- bei L: Punkt auf Kennlinie suchen mit gleicher Stromstärke

- P muß einziger Punkt mit dieser Eigenschaft sein.

$\Rightarrow$ periodischer Verlauf von Strom und Spannung!

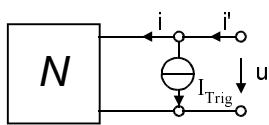
Trigge rung:

- Durch Triggerimpuls wandert man von einem stabilen zu einem anderen stabilen GGP. Der Triggerimpuls verschiebt die Kennlinie so, daß der Betriebspunkt von einem GGP in den anderen wandern kann.

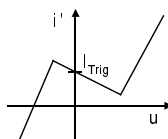
- i_{Trig} oder u_{Trig} muß groß genug sein, damit Zwischenzustände erreicht werden, es dürfen aber keine neuen Totpunkte entstehen

- Δt muß lang genug sein, damit evtl. Zwischenpunkte durchlaufen werden.

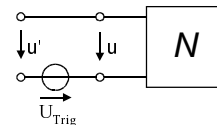
Triggern mit Strom (bei C)



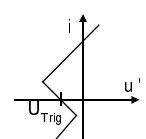
$$i' = i + I_{Trig}$$



Triggern mit Spannung (bei L)



$$u' = u - U_{Trig}$$

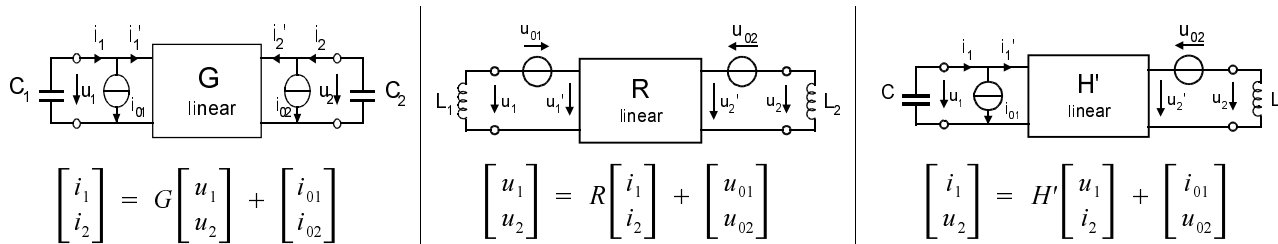


Lineare Schaltungen zweiten Grades

$$\dot{x} = A x + B v$$

Zustandsgleichungen aufstellen:

1. Schaltung umzeichnen, so daß Reaktanzen an Toren eines resistiven Zweitors liegen.
2. ESB's, je nach Reaktanztyp:



3. Matricelemente berechnen; in Abhängigkeit von unabhängigen Torgrößen und Erregungsquellen (innen)

① $i_1 = g_1(u_1, u_2, u_0, i_0) = -C \dot{u}_1$	① $u_1 = r_1(i_1, i_2, u_0, i_0) = -L \dot{i}_1$	① $i_1 = h_1(u_1, i_2, u_0, i_0) = -C \dot{u}_1$
$i_2 = g_2(u_1, u_2, u_0, i_0) = -C \dot{u}_2$	$u_2 = r_2(i_1, i_2, u_0, i_0) = -L \dot{i}_2$	$u_2 = h_2(u_1, i_2, u_0, i_0) = -L \dot{i}_2$
② oder G aufstellen	② oder R aufstellen	② oder H' aufstellen

4. Zustandsmatrix A ermitteln

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \cdot G \quad \text{oder aus ①}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \cdot R \quad \text{oder aus ①}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot H' \quad \text{oder aus ①}$$

5. Einkoppelmatrix B bestimmen

$v = \begin{bmatrix} u_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$ ist Vektor aller inneren Erregungen; T ist Transformationsmatrix

Wenn die Erregung gleich 0, handelt es sich um ein autonomes System

$$\begin{bmatrix} i_{01} \\ i_{02} \end{bmatrix} = T v \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \cdot T$$

$$\begin{bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix} = T v \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \cdot T$$

$$\begin{bmatrix} i_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix} = T v \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot T$$

6. Zustandsgleichung aufstellen: Zustandsvektor x :

$$x = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix}$$

Ausgangssignal: $y = c^T x + d v = u_{out}$ mit:

c^T = Auskoppelvektor
 d = Durchgriff der Erregung
 v = Erregungsvektor

Lösen der Zustandsgleichung

EW's berechnen: $\lambda_{1,2} = \frac{T}{2} \pm \sqrt{\frac{T^2}{4} - \Delta}$

$T = a_{11} + a_{22} = \text{Spur } A$

$\Delta = \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$\det(A - \lambda E) \stackrel{!}{=} 0$

$A = \text{Zustandsmatrix} = \text{Systemmatrix}$

EV's berechnen: $(A - \lambda_1 E) \underline{q}_1 \stackrel{!}{=} 0$

$(A - \lambda_2 E) \underline{q}_2 \stackrel{!}{=} 0$

man wählt: $|\lambda_1| < |\lambda_2|$

$\Rightarrow q_2$ ist schneller EV

Zeitkonstante berechnen: $\tau = \frac{-1}{\lambda}$

Homogenen Zustandsgleichung ohne Erregung:

$\dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t)$

$\underline{v}(t) = 0$

1. Fall: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{q}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \underline{q}_2$

$c_{1,2}$ mit Anfangsbedingung bestimmen: $\underline{x}(0) = c_1 \underline{q}_1 + c_2 \underline{q}_2$

2. Fall: $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$

$\underline{x}(t) = e^{\lambda t} [E + (A - \lambda E)t] \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

3. Fall: $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \lambda \in \mathbb{C}$

$\underline{x}(t) = c_1 R e(e^{\lambda t} \underline{q}) + c_2 I m(e^{\lambda t} \underline{q})$

$\underline{x}(t) = c_1 e^{\alpha t} [\cos(\beta t) \underline{q}_r - \sin(\beta t) \underline{q}_i] + c_2 e^{\alpha t} [\sin(\beta t) \underline{q}_r + \cos(\beta t) \underline{q}_i]$

($\lambda = \alpha + j\beta$, $\alpha = \text{Dämpfung}$)

Homogenen Zustandsgleichung (Transformation auf Normalform)

1. Fall: $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$Q^{-1} A Q = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, Modalmatrix: $Q = [\underline{q}_1, \underline{q}_2]$

$\underline{\xi}_0 = Q^{-1} \underline{x}_0$ bestimmen

Normalform: $\dot{\underline{\xi}} = \Lambda \underline{\xi} \Rightarrow \underline{\xi}(t) = e^{\Lambda t} \underline{\xi}_0$

Lösung: $\underline{\xi}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \xi_{01} \\ e^{\lambda_2 t} \xi_{02} \end{bmatrix}$

Rücktransformation: $\underline{x}(t) = Q \underline{\xi}(t)$

2. Fall: $\lambda_1 = \lambda_2$ Transformation auf Jordan-Normalform

Transformation $\underline{\xi}_0 = Q^{-1} \underline{x}_0$ kann nicht ausgeführt werden, da Q nicht mehr invertierbar ist.

$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

$\underline{\xi}_0 = Q^{-1} \underline{x}_0$

$Q' = \begin{bmatrix} -a_{12} & -a_{12} \\ \frac{a_{11}-a_{12}}{2} & \frac{a_{11}-a_{12}}{2} - 1 \end{bmatrix}$

Lösung: $\underline{\xi}(t) = e^{Jt} \underline{\xi}_0 = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{01} \\ \xi_{02} \end{bmatrix}$

Rücktransformation $\underline{x}(t) = Q' \underline{\xi}(t)$

3. Fall: $\lambda_1 = \lambda_2^* = \overline{\lambda_2} = (\alpha \pm j\beta) \in \mathbb{C}$ Transformation auf reellwertige Normalform

Komplexwertige Normalform: $\Lambda = \begin{bmatrix} \alpha + j\beta & 0 \\ 0 & \alpha - j\beta \end{bmatrix}$

Reelwertige Normalform: $\Lambda' = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$

$Q = [\underline{q}, \underline{q}^*]$; $Q' = [\underline{q}_r, -\underline{q}_i]$

$\underline{x} = Q \underline{\xi} \Leftrightarrow \underline{x} = Q' \underline{\xi}'$

$\underline{\xi}' = Q'^{-1} Q \underline{\xi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \underline{\xi}$

ausführlich: $\xi_1' = \xi_1 + \xi_2 = 2 R e(\xi)$

$\xi_2' = -j(\xi_1 - \xi_2) = 2 I m(\xi)$

Autonome Zustandsgleichung (Zurückführen auf ein hom. System)

$\dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t) + B \underline{v}_0$

$\underline{v}_0 = \text{const}$

1. Fall: Wenn A invertierbar

$\Rightarrow$ Koordinatentransformation: $\underline{x}' = \underline{x} - \underline{x}_\infty$; $\dot{\underline{x}}' = \dot{\underline{x}}$; $\underline{x}_\infty = -A^{-1} B \underline{v}_0$

$\Rightarrow$ homogene DGL: $\dot{\underline{x}}' = A \underline{x}'$

$\Rightarrow$ obiger Lösungsansatz

2. Fall: $\underline{x} = \underline{x}(\text{hom}) + \underline{x}(t_\infty)$

entspricht einer Verschiebung des Ursprungs in $\underline{x}(t_\infty)$!

$\underline{x}(t_\infty) = -A^{-1} B \underline{v}_0$ ist stationärer Endwert im stabilen Fall

$\underline{x}(\text{hom})$ ist homogene Lösung

Inverse Matrix:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

Zustandsgleichung mit allgemeiner (zeitabhängiger) Erregung:

a) allgemeine Form: $\dot{x}(t) = A x(t) + B v(t)$

b) Transformation: $\xi = \Lambda \xi + Q^{-1} B v = \Lambda \xi + v'$ wobei $\xi = Q^{-1} x$ $\Lambda = Q^{-1} A Q$ $v' = Q^{-1} B v$ $Q = [q_1 | q_2]$

c) Lösung:

$$\xi(t) = e^{\Lambda t} \xi_0 + \int_0^t e^{\Lambda(t-t')} v'(t') dt'$$

zero input response + zero state response

Ausführlich:

$$\xi_1(t) = e^{\lambda_1 t} \xi_{01} + \int_0^t e^{\lambda_1(t-t')} v_1'(t') dt'$$

$$\xi_2(t) = e^{\lambda_2 t} \xi_{02} + \int_0^t e^{\lambda_2(t-t')} v_2'(t') dt'$$

d) Rücktransformation des

Lösungsvektors ξ in ursprünglichen Vektor x : $x = Q \xi$

- Ein System ist stabil, wenn gilt:

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \text{ da dann gilt: } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

- Im Komplexen ist die Richtung von q_x nach $-q_i$ in der (ξ_1', ξ_2') Ebene immer im Gegenurzeigersinn

- Um ein instabiles System zu erhalten ist mindestens ein aktives Element nötig.

Lösungsbahnen des DGL - Systems $\dot{x} = A x$ im $\mathbb{R}^2$

	Matrix A	Eigenwerte	Art von $x=0$	Bezeichnung	Bahnen	Zeitantwort:
1	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	instabil	Sattelpunkt		zu 1. schwach gedämpfte Schwingung Zeitverlauf $\xi_1(t) = k e^{\alpha t} \cos(\beta t + \theta)$ ($\alpha < 0$) Kreisfrequenz $\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$
2	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	asymptotisch stabil	Knoten 2. Art		
3		$0 < \lambda_1 < \lambda_2$	instabil			
4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 < 0$	stabil	Gerade von Ruhelagen		zu 3. ungedämpfte Schwingung $\xi_1(t) = k \cdot \cos(\beta t + \theta)$ $\beta^2 = \omega_0^2$
5		$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 > 0$	instabil			
6	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$	$\lambda < 0$	asymptotisch stabil	Knoten 1. Art		
7		$\lambda > 0$	instabil			
8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda = 0$	stabil	Ebene von Ruhelagen		zu 5. stark gedämpfte Schwingung $\xi_1(t) = \xi_{01} e^{\alpha t}$ ($\alpha < 0$) $\tau_1 = -\frac{1}{\lambda_1}$ $\tau_2 = -\frac{1}{\lambda_2}$
9	$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$	$\lambda < 0$	asymptotisch stabil	Knoten 3. Art		
10		$\lambda > 0$	instabil			
11	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda = 0$	instabil	Gerade von Ruhelagen		zu 9. aperiodisch gedämpfte Schwingung $\xi_1(t) = (\xi_{01} + \xi_{02} t) e^{\alpha t}$ ($\alpha < 0$) abhängig von ξ_{02}
12	$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$	$\alpha < 0$ $\beta \neq 0$	asymptotisch stabil	Strudelpunkt		
13		$\alpha > 0$ $\beta \neq 0$	instabil			
14	$\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha = 0$ $\beta \neq 0$	stabil	Wirbelpkt. Zentrum		

Nichtlineare dynamische Schaltungen

Zustandsgleichungen aufstellen:

- Zustandsvariable auswählen:

C : spannungsgesteuert $\Rightarrow u_C$!	bei L : stromgesteuert $\Rightarrow i_L$!
Ladungsgesteuert $\Rightarrow q$	flußgesteuert $\Rightarrow \Phi$
beides $\Rightarrow u_C$	beides $\Rightarrow i_L$
- wenn die Reaktanzen von keiner Größe gesteuert werden, gibt es keine Beschreibung!!
- allgemeine Form:

$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$	$\dot{i}_C = \dots = C \dot{u}_C$	Aus nichtlinearer Reaktanz: $i_C = \dot{q}$ bzw. $u_L = \dot{\Phi}$
$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$	$\dot{u}_L = \dots = L \dot{i}_L$	

Gleichgewichtspunkte $x_1(t_\infty)$, $x_2(t_\infty)$ bestimmen:

- durch Zustandsgleichungen $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ Nullsetzen und nach x_1 und x_2 auflösen
- direkt aus Schaltung bestimmen: $C \Rightarrow LL$, $L \Rightarrow KS$ (nur sinnvoll wenn Zustandsbeschreibung nicht gebraucht wird)

Zustandsgleichungen normieren: (falls Norm gegeben!) $\frac{d}{dt} \Rightarrow \frac{d}{d\tau}$ mittels substituieren

Gleichgewichtspunkte klassifizieren:

- Jakobimatrix durch Ableiten der Zustandsgleichungen aufstellen:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} \end{bmatrix} \bigg|_{GGP, x=x(t_\infty)}$$
- Gleichgewichtspunkte einzeln in J einsetzen und jeweils Eigenwerte berechnen $\det(J - \lambda E) = 0$
- Aus den Eigenwerten folgen die Arten der Phasenportraits
- bei stückweise linearen Kennlinien braucht man J nicht aufzustellen, sondern man unterteilt jeweils in einzelne lineare Systeme
- Satz von Hartmann: Wenn in einem GGP der Realteil aller EW's der Jacobi-Matrix J ungleich Null ist, dann verhält sich das System in der Umgebung des GGP genauso wie ein lineares System mit denselben Eigenwerten (derselben Systemmatrix)
- Ist der Realteil auch nur eines einzigen Eigenwerts gleich Null ($\alpha=0$) kann man keine Aussage über das Stabilitätsverhalten machen. (Ausnahme; Stückw. Lineare Systeme)
- Bei Stückweise linearen Systemen:
 - Jeden Bereich für sich betrachten und lineare Bereichsdifferentialgleichungen angeben.
 - Keine Differentiation, Kein Satz von Hartmann nötig!

Phasenportrait zeichnen:

- Gleichgewichtspunkte einzeichnen und beschriften (Schnittpunkte von $m=0$; $m=\infty$)
- Eigenvektoren einzeichnen (vor allem bei Sattelpunkt und Knoten, bei Strudelpunkt nicht so wichtig)
- Lokale Phasenportraits in der Nähe der Gleichgewichtspunkte einzeichnen
- Isoklinen einzeichnen:

$f_2(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow m = 0$	m ist Steigung der Tangente an die Trajektorie
$f_1(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow m \rightarrow \infty$	im Schnittpunkt der Trajektorie mit der Isokline
- Trajektorien einzeichnen
- Separatrix ist / sind Verlängerung der EV der instabilen Gleichgewichtspunkte (auch gekrümmt)
- Wenn alle Bauelemente der Schaltung ungepolt sind, ist das Phasenportrait punktsymmetrisch zum Ursprung.

Konservative Schaltungen (hinreichend genaue Modelle realer Schaltungen sind niemals konservativ!)

Bedingung: für konservative Schaltungen existiert stetige Energiefunktion $E(x)$

$$- \dot{E}=0, \quad \frac{\partial E}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial E}{\partial x_2} f_2 = 0$$

- Nur Sattel- und Wirbelpunkte sind als Arten von Gleichgewichtspunkten möglich

- Trajektorien sind Äquipotentiallinien der Energiefunktion

$\Gamma =$ Trajektorie

$$E(\Gamma) = E(u_C(0), i_L(0)) \quad E(\Gamma) = \frac{1}{2} (C u_C^2 + L i_L^2) \quad \text{in einem Schwingkreis gespeicherte Feldenergie } E$$

- Scheitelwerte $\hat{u}_C, \hat{i}_L$ erhält man durch Nullsetzen der jeweils anderen Zustandsgröße $\hat{i}_L = \sqrt{\frac{2E(\Gamma)}{L}} \quad \hat{u}_C = \sqrt{\frac{2E(\Gamma)}{C}}$

- Zeitdauer eines Umlaufs um eine Trajektorie $T_0 = T(\Gamma) = \oint_{\Gamma} dt = 4 \int_0^{\hat{i}_L} \frac{L}{u_C} di_L = 2\pi \sqrt{LC}$

- Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\frac{\pi}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad u_C = \hat{u}_C \cos(\omega_0 t - \Phi_0) \quad \text{Phasenlage aus Anfangszustand!}$
 $i_L = \hat{i}_L \sin(\omega_0 t - \Phi_0)$

- Ergänzung zum Satz von Hartmann:

Ein GGP einer nichtlinearen dynamischen Schaltung ist genau dann ein Wirbelpunkt, wenn seine Jacobimatrix rein imaginäre EW's ($\alpha=0$) hat und das System in einer offenen Umgebung U des GGP konservativ ist.

Oszillatoren

- Phasenportrait ist stabiler Grenzzyklus (und damit ein Oszillator) $\Leftrightarrow$

- Es darf nur einen GGP geben. Dieser muß instabil sein.

- autonomes, dynamisches System zweiten Grades

- Trajektorien müssen zu allen Anfangswerten aus Umgebung U beschränkt sein (bei letztendlich passiven Elementen immer der Fall!)

- Zustandsgrößen sind beschränkt (Schaltung nur aus positiven, linearen C, L und R besteht)

Stabilitätsuntersuchung:

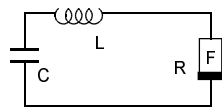
EWs betrachten:

$\text{Re} < 0 \Rightarrow$ GGP stabil

$\text{Re} > 0 \Rightarrow$ GGP instabil

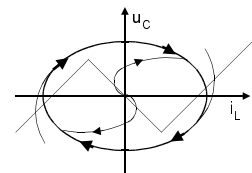
$\text{Re} = 0 \Rightarrow$ keine Aussage

- Stückweise lineare Oszillatoren:



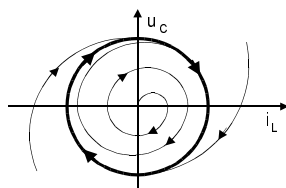
$$\dot{u}_C = -\frac{1}{C} i_L$$

$$\dot{i}_L = -\frac{1}{L} u_C - \frac{1}{L} r_F(i_L)$$



typisches reelles
Phasenportrait:
(stückweise linearer Osz.)

fast harmonischer Oszillator



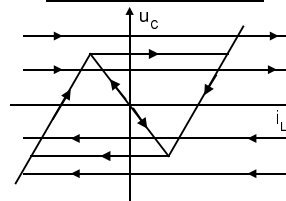
Frequenz abhängig von den Werten der Reaktanzen.

Amplitude abhängig von Nichtlinearität der Bauteile.

($L \rightarrow \infty, C \rightarrow \infty, R \rightarrow 0$)

$$\text{Resonanzfrequenz} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Relaxationsoszillator



Frequenz und Amplitude werden wesentlich von Nichtlinearität der Bauteile bestimmt.

$$(L \rightarrow 0, R \rightarrow \infty) \quad \omega_0 = \frac{\pi}{\ln 3} \cdot \frac{1}{RC} \quad 2\sqrt{\frac{L}{C}} \ll R$$

Komplexe Wechselstromrechnung, Analyse dynamischer Schaltungen

Allgemeines:

Eigenschwingung der dynamischen Schaltung: $x(t) = Re\{A_m e^{\sigma t} e^{j(\alpha + \omega t)}\} = A_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \alpha)$

$p = \sigma + j\omega \Leftrightarrow$ Frequenzparameter p

$\omega = 2\pi f \Leftrightarrow$ Kreisfrequenz ω

$A = A_m e^{j\alpha} \Leftrightarrow$ Komplexe Amplitude

$$\boxed{I_C = j\omega C U_C} \quad \boxed{U_L = j\omega L I_L} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{I_L = \frac{1}{j\omega L} \cdot U_L} \quad \boxed{U_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot I_C}$$

Netzwerkfunktionen:

- Zweipolfunktionen: (Zeiger die am gleichen Tor definiert sind (Immitanzen))

$$u(t) = Re\{U e^{pt}\} \quad i(t) = Re\{I e^{pt}\} \quad \text{mit } p = j\omega$$

- Impedanz: komplexer Widerstand, Scheinwiderstand

$$\boxed{Z(j\omega) = \frac{U}{I}} \quad \boxed{Z_L(p) = pL} \quad \boxed{Z_C(p) = \frac{1}{pC}}$$

- Attmitanz: komplexer Leitwert, Scheinleitwert

$$\boxed{Y(j\omega) = \frac{I}{U}} \quad \boxed{Y_L(p) = \frac{1}{pL}} \quad \boxed{Y_C(p) = pC}$$

- Transferfunktion: (Übertragungsfunktion, Zeigergrößen gehören zu verschiedenen Toren)

$$\boxed{I_q = Y_k(p) U_k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{H(j\omega) = \frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{U_{km}}{I_n} = \frac{(-1)^{n+m} \det Y_{nm}(j\omega)}{\det Y_K(j\omega)}}$$

$\det Y_{nm}(j\omega)$ ist die Unterdeterminante von Y_K die nach streichen der n-ten Zeile und m-ten Spalte von Y_K entsteht

Cramer Regel: $u_{ki} = \frac{\det Y_{ki}}{\det Y_K}$

$\det Y_{ki}$ entsteht durch ersetzen der i. Spalte in Y_K durch i_q

Eigenfrequenz bestimmen:

- Transferfunktion faktorisieren (wichtig für Bode)

- Transferfunktion normieren

- Nullstellen des Zählerpolynoms $\Rightarrow$ Nullstellen von $H(p)$

- Nullstellen des Nennerpolynoms $\Rightarrow$ Polstellen von $H(p)$

Eigenfrequenzen $p = \sigma + j\omega$

- Aussage über Phasenportrait:

Wenn die Nullstellen des Nennerpolynoms in der linken p Halbebene liegen ist das System stabil

Frequenzgang: (Frequenzabhängigkeit von Betrag und Winkel (Real und Imaginärteil) der Komplexwertigen Funktionen)

$$\boxed{v(\omega) = 20 \lg \left| \frac{H(j\omega)}{H(j\omega_0)} \right| \text{ in dB}} \quad v(\omega) = \ln \left| \frac{H(j\omega)}{H(j\omega_0)} \right| \text{ in } Np$$

$$1 Np = \frac{20 \text{ dB}}{\ln 10} \approx 8,69 \text{ dB}$$

$$1 \text{ dB} \approx 0,115 Np$$

$$\varphi(\omega) = \angle H(j\omega) = \begin{cases} \arctan \frac{\text{Im}\{H(j\omega)\}}{\text{Re}\{H(j\omega)\}} & \text{für } \text{Re}\{H(j\omega)\} \geq 0 \\ \arctan \frac{\text{Im}\{H(j\omega)\}}{\text{Re}\{H(j\omega)\}} + \pi & \text{für } \text{Re}\{H(j\omega)\} < 0 \end{cases}$$

$$\lg 1 = 0$$

$$\lg 10 = 1$$

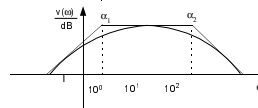
$$\lg 1/10 = -\lg 10 = -1$$

$$\lg 100 = 2$$

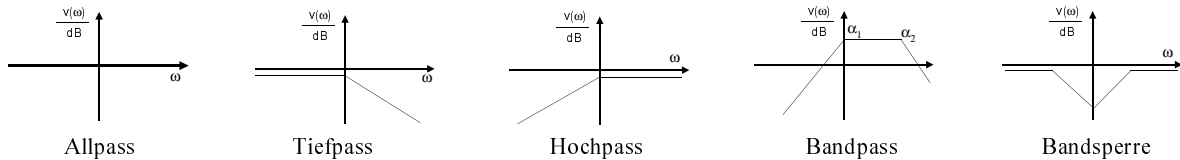
Bode Diagramm

	Betrag $v(\omega)$ logarithmisch auftragen	Phase $\varphi(\omega)$ linear auftragen
$H(j\omega) = k = \text{const}$ $\Rightarrow v(\omega) = 20 \lg k $		
$H(j\omega) = \frac{j\omega}{\alpha}$ $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega/\alpha}$		
$H(j\omega) = 1 + \frac{j\omega}{\alpha}$		
$H(j\omega) = 1 - \frac{j\omega}{\alpha}$		
$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\alpha}$		
$H(j\omega) = 1 + \left(\frac{j\omega}{\alpha}\right)^2$ 40 dB / Dec wegen ..^2		

- bei 3dB Eckfrequenzen liegt der Kurvenverlauf um 3dB unter den Asymptoten
- Schnittpunkte der Asymptoten sind Eigenfrequenzen α_1, α_2

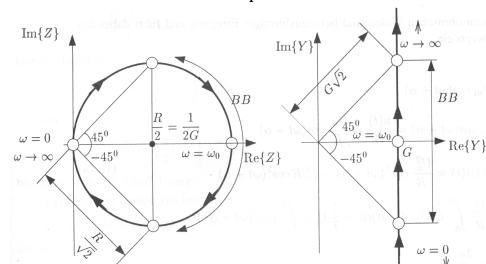


Typische Übertragungsfunktionen



Ortskurven

- es gibt nur positive Frequenzen; man berechnet $Z(j\omega)$ für $\omega=0$ und $\omega \rightarrow \infty$
- BB = Bandbreite
- A, B ; 3dB Eckfrequenzen



Aufstellen von Ortskurven:

- wichtige Frequenzen berechnen: $\omega=0$; $\omega \rightarrow \infty$; $\omega=\omega_0$; $|Re\{\xi\}| = |Im\{\xi\}|$
- Durchlaufsin überlegen für $Z = R + j\omega L$ ↑
für $Z = R + \frac{1}{j\omega L}$ ↓
- Komplexer Widerstand Z ist: - in Widerstandsebene : Gerade - Leitwert Y ist: - in Widerstandsebene : Kreis
- in Leitwertsebene : Kreis - in Leitwertsebene : Gerade

Komplexe Leistung:

$$P = \frac{1}{2} U I^* = P_W + j P_B \quad \text{Wirkleistung:} \quad P_W = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt = Re\{P\}$$

Leistung hängt nicht von der Frequenz ab!