

Kirchhoffgesetze

Anwendbarkeit: Konzentriertheithypothese muss erfüllt sein $d \ll \lambda = \frac{c}{f}$

Knotenregel (KCL – Kirchhoffs Current Law):

Für jeden Knoten gilt:
Summe der auslaufenden Ströme – Summe der einlaufenden Ströme = 0
 $\sum i_i = 0$ *auslaufende positiv, einlaufende negativ*

Maschenregel (KVL – Kirchhoffs Voltage Law):

Für jede Masche (= beliebiger geschlossener Umlauf) gilt:
Summe der Teilspannungen = 0
 $\sum u_i = 0$ *Laufrichtung positiv, entgegen negativ*

Resistive Eintore

Darstellung: implizit: $f_F(u, i) = 0$ explizit: $u = r(i)$ parametrisiert: $u = u(\lambda)$
 $i = g(u)$ $i = i(\lambda)$

Eigenschaften:

stromgesteuert: \exists Darstellung $u = r(i)$ spannungsgesteuert: \exists Darstellung $i = g(u)$

ungepolt: $(u, i) \in F \Leftrightarrow (-u, -i) \in F$ KL ist punktsymmetrisch zu (0,0)
aktiv: $\exists (u, i)$ mit $u \cdot i < 0$ KL hat Abschnitte im II. oder IV. Quadranten
passiv: $\forall (u, i)$ gilt $u \cdot i \geq 0$ nicht aktiv, also KL hat **keine** Punkte in II. oder IV. Quadranten
verlustlos: $u \cdot i = 0$ für alle $(u, i) \in F$ KL liegt nur auf den Koordinatenachsen
quellenfrei: $(0, 0) \in F$ KL geht durch den Ursprung
streng linear: F UVR der $u-i$ -Ebene KL ist (0,0), Ursprungsgerade oder ganze $u-i$ -Ebene
linear: F ist affiner Raum KL ist eine beliebige Gerade
stückweise linear: KL besteht aus Geradenstücken

Dualität: $(u, i) \in F \Leftrightarrow (R_d \cdot i, \frac{u}{R_d}) \in F^d$ Für $R_d = 1$ Spiegelung an der Winkelhalbierenden

Umpolung: $(u, i) \in F \Leftrightarrow (-u, -i) \in \bar{F}$ Spiegelung von KL am Ursprung

Widerstände und Leitwerte:

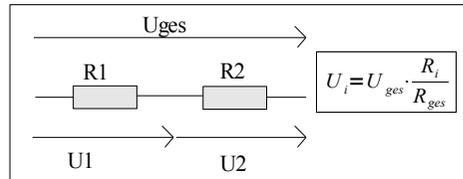
$$G = \frac{1}{R}$$

Serienschaltung: $R_{gesamt} = R_1 + \dots + R_i$

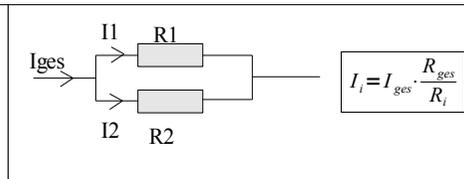
Parallelschaltung: $G_{gesamt} = G_1 + \dots + G_i$

$A \parallel B = \frac{A \cdot B}{A + B}$ A und B sind entweder Widerstände parallel oder Leitwerte in Reihe

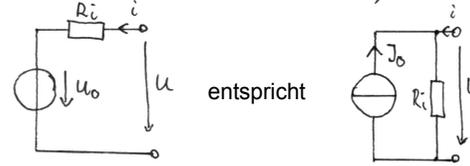
Spannungsteiler:



Stromteiler:



Quellwandlung linearer Quellen:

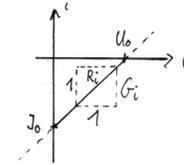


U_0 und I_0 sind **Leerlaufspannung** und **Kurzschlussstrom** einer Quelle
 R_i ist der Kurzschluss-Leerlauf-Ersatzwiderstand der Quelle

Für jede lineare Quelle gilt: $i = G_i \cdot u - I_0$ $u = R_i \cdot i + U_0$

$$R_i = \frac{U_0}{I_0} \quad G_i = \frac{1}{R_i}$$

Kennlinie:



Zu beachten: dies ist die interne Quellenkennlinie! bei der externen Quellenkennlinie wird das Vorzeichen von i umgedreht und die KL somit an der u -Achse gespiegelt

Kennlinienbestimmung von verschalteten Bauteilen:

Bei **parallelverschalteten** Bauteilen ist die Spannung gleich. Die Ströme werden nach Knotenregel addiert! **Grafisch:** Kennlinien vertikal addieren

(Achtung: Spannungspfeil muss für beide Bauteile gleichorientiert sein)

Bei **seriellverschalteten** Bauteilen ist der Strom gleich. Die Ströme werden nach Maschenregel addiert! **Grafisch:** Kennlinien horizontal addieren

(Achtung: Häufig gilt bei Parallelschaltung $i_1 = -i_2$: in diesem Fall eine KL an u -Achse spiegeln)

Arbeitspunktbestimmung:

Aufteilen der Schaltung in ein Quelleneintor Q und ein Lasteneintor L, die parallel verschalten sind

Schneiden der Kennlinie von L mit der **externen** (I umgedreht) Kennlinie von Q (rechnerisch durch gleichsetzen nach gemeinsamer Variable)

Linearisierung:

spannungsgesteuert: $i = \frac{dg}{du}(U_{AP}) \cdot \Delta u + I_{AP}$ stromgesteuert: $u = \frac{dr}{di}(I_{AP}) \cdot \Delta i + U_{AP}$

„es wird eine Tangente an die KL im Arbeitspunkt als KL für kleine Signal verwendet“

Ersatzschaltbilder (ESB):

Aufteilen aller Quellen in eine Konstantquelle und eine Wechselquelle

Großsignal: Wechselquellen weglassen

Kleinsignal: Konstantquellen weglassen Bauteile im AP **linearisieren**

(„Weglassen“ bedeutet: Spannungsquelle durch KS, Stromquelle durch LL ersetzen)

Resistive Zweitore

Darstellung:

- implizit: $f(u, i) = 0$ linearer Fall: $M \cdot u + N \cdot i = [M \ N] \cdot \begin{pmatrix} u \\ i \end{pmatrix} = 0$

- parametrisiert: $\begin{pmatrix} u \\ i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u(c) \\ i(c) \end{bmatrix}$ linearer Fall: $\begin{pmatrix} u \\ i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix} \cdot c$ $\begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^{(1)} & u^{(2)} \\ i^{(1)} & i^{(2)} \end{bmatrix}$

Betriebsmatrix aus Ergebnissen zweier Messungen

- explizit: linearer Fall: $\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = G \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = H \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{pmatrix}$ $R = G^{-1}$

$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = H' \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{pmatrix} = A' \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ -i_1 \end{pmatrix}$ $H = H'^{-1}$

Umrechnung: $[M \ N] \cdot \begin{pmatrix} u \\ i \end{pmatrix} = 0$ $|M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} u \\ i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix} \cdot c$ $| \cdot U^{-1} \quad c \rightarrow u$

$u + M^{-1} \cdot N \cdot i = 0$ $\begin{pmatrix} u \\ i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ I U^{-1} \end{bmatrix} \cdot u \Rightarrow G = I U^{-1}$ für andere Fälle äquivalent

$\Rightarrow R = -M^{-1} N$

Eigenschaften:

verlustlos: $u^T \cdot i = 0$ für alle (u, i) Summe der Leistungen ist Null

aktiv: linearer Fall: $U^T \cdot I + I^T \cdot U = 0$ $\exists (u, i)$ mit $u^T \cdot i < 0$

Dualität: $\begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix}^d = \begin{bmatrix} I \cdot R_d \\ U \\ R_d \end{bmatrix} \Rightarrow G^d = \frac{1}{R_d} \cdot R$ $R^d = R_d^2 \cdot G$ Antimetrisch: Umgekehrt = Dual

Umkehrbarkeit: $G = PGP$ $R = PRP$ $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ „Zeilentausch+Spaltentausch“

$A = A'$ z.B. $g_{11} = g_{22}$ und $g_{12} = g_{21}$ $r_{11} = r_{22}$ und $r_{12} = r_{21}$

Reziprozität: $U^T \cdot I - I^T \cdot U = 0$ $G = G^T$ $R = R^T$ $\det(A) = 1$ $\det(A') = 1$

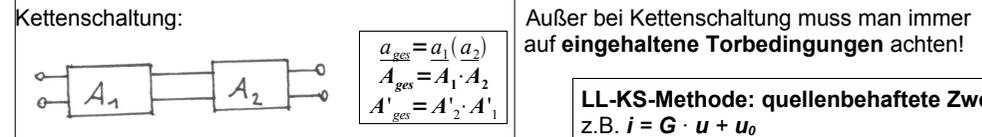
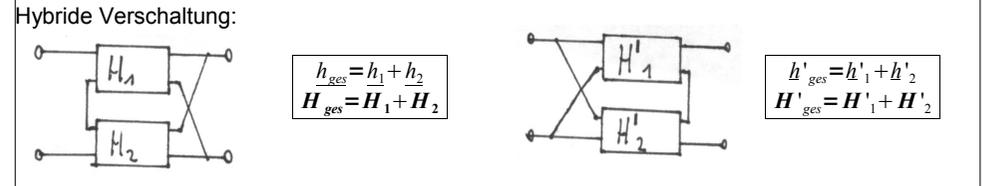
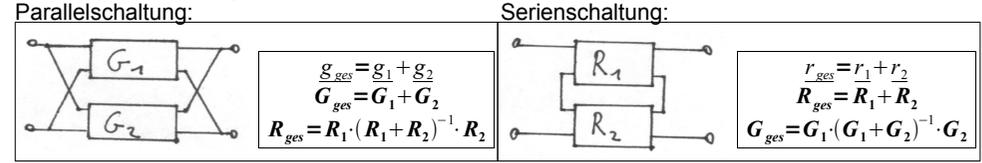
Netzwerke bestehend nur aus R, C und L sind immer reziprok

Direktes Aufstellen der Zweitormatrizen mit der Kurzschluss-Leerlauf-Methode:

$g_{11} = \frac{i_1}{u_1 (u_2=0)}$	Eingangsleitwert bei kurzgeschlossenem Ausgang	$r_{11} = \frac{u_1}{i_1 (i_2=0)}$	Eingangswiderstand bei leerlaufendem Ausgang
$g_{22} = \frac{i_2}{u_2 (u_1=0)}$	Ausgangsleitwert bei kurzgeschlossenem Eingang	$r_{22} = \frac{u_2}{i_2 (i_1=0)}$	Ausgangswiderstand bei leerlaufendem Eingang
$g_{21} = \frac{i_2}{u_1 (u_2=0)}$	Vorwärtstransferleitwert bei kurzgeschlossenem Ausgang	$r_{21} = \frac{u_2}{i_1 (i_2=0)}$	Vorwärtstransferwiderstand bei leerlaufendem Ausgang
$g_{12} = \frac{i_1}{u_2 (u_1=0)}$	Rückwärtstransferleitwert bei kurzgeschlossenem Eingang	$r_{12} = \frac{u_1}{i_2 (i_1=0)}$	Rückwärtstransferwiderstand bei leerlaufendem Eingang

(Die Elemente der übrigen Matrizen ergeben sich sinngemäß ... Tor 1= Eingang; Tor 2=Ausgang)

Zusammenschaltung von Zweitoren:



LL-KS-Methode: quellenbehaftete Zweitore
 z.B. $i = G \cdot u + u_0$
 Zunächst Matrix **G** bestimmen:

- Unabhängige Quellen auf 0 setzen (U-Quelle -> KS, I-Quelle -> LL)
- **Nacheinander** die beiden steuernden Größen auf 0 setzen (u -> KS, i -> LL) um jeweils 2 Matrixelemente zu ermitteln

Dann Quellenvektor **u₀** bestimmen:

- Quellen wieder berücksichtigen
- **Gleichzeitig** beide steuernde Größen auf 0 setzen (u -> KS, i -> LL) um beide Einträge des Quellenvektors zu ermitteln

Linearisierung:

Analog zu Eintoren – Beispiel Leitwertsbeschreibung:

$i = g_{lin}(\Delta u) + I_0$

$i = J_g \cdot \Delta u + I_0$ J_g : Jakobimatrix der Ableitungen

$$J_g = \begin{bmatrix} \frac{dg_1}{du_1} & \frac{dg_1}{du_2} \\ \frac{dg_2}{du_1} & \frac{dg_2}{du_2} \end{bmatrix}$$

Umrechnung der Zweitormatrizen:

	R	G	H	H'	A	A'
R	$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det G} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{22}} \begin{bmatrix} \det H & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h'_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -h'_{12} \\ h'_{21} & \det H' \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{21}} \begin{bmatrix} a_{11} & \det A \\ 1 & a_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{21}} \begin{bmatrix} a'_{22} & 1 \\ \det A' & a'_{11} \end{bmatrix}$
G	$\frac{1}{\det R} \begin{bmatrix} r_{22} & -r_{12} \\ -r_{21} & r_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -h_{12} \\ h_{21} & \det H \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h'_{22}} \begin{bmatrix} \det H' & h'_{12} \\ -h'_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22} & -\det A \\ -1 & a_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{12}} \begin{bmatrix} a'_{11} & -1 \\ -\det A' & a'_{22} \end{bmatrix}$
H	$\frac{1}{r_{22}} \begin{bmatrix} \det R & r_{12} \\ -r_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -g_{12} \\ g_{21} & \det G \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det H'} \begin{bmatrix} h'_{22} & -h'_{12} \\ -h'_{21} & h'_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{22}} \begin{bmatrix} a_{12} & \det A \\ -1 & a_{21} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{11}} \begin{bmatrix} a'_{12} & 1 \\ -\det A' & a'_{21} \end{bmatrix}$
H'	$\frac{1}{r_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -r'_{12} \\ r'_{21} & \det R \end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{22}} \begin{bmatrix} \det G & g_{12} \\ -g_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det H} \begin{bmatrix} h_{22} & -h_{12} \\ -h_{21} & h_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{11}} \begin{bmatrix} a_{21} & -\det A \\ 1 & a_{12} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{21}} \begin{bmatrix} a'_{21} & -1 \\ \det A' & a'_{12} \end{bmatrix}$
A	$\frac{1}{r_{21}} \begin{bmatrix} r_{11} & \det R \\ 1 & r_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{21}} \begin{bmatrix} -g_{22} & -1 \\ -\det G & -g_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{21}} \begin{bmatrix} -\det H & -h_{11} \\ -h_{22} & -1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h'_{21}} \begin{bmatrix} 1 & h'_{22} \\ h'_{11} & \det H' \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det A'} \begin{bmatrix} a'_{22} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{11} \end{bmatrix}$
A'	$\frac{1}{r_{12}} \begin{bmatrix} r_{22} & \det R \\ 1 & r_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{12}} \begin{bmatrix} -g_{11} & -1 \\ -\det G & -g_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{12}} \begin{bmatrix} 1 & h_{11} \\ h_{22} & \det H \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h'_{12}} \begin{bmatrix} -\det H' & -h'_{22} \\ -h'_{11} & -1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix}$

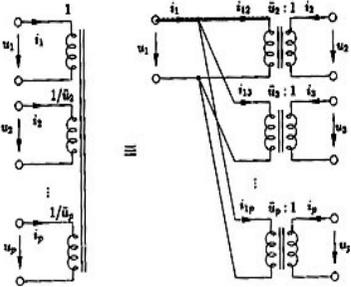
Spezielle Mehrere:

Mehrtor-Übertrager

$$\begin{aligned}
 u_1 - \ddot{u}_2 \cdot u_2 &= 0 \\
 u_1 - \ddot{u}_3 \cdot u_3 &= 0 \\
 &\vdots \\
 u_1 - \ddot{u}_p \cdot u_p &= 0 \\
 i_1 + \frac{1}{\ddot{u}_2} \cdot i_2 + \frac{1}{\ddot{u}_3} \cdot i_3 + \dots + \frac{1}{\ddot{u}_p} \cdot i_p &= 0 \\
 u_1 : u_2 : \dots : u_p = 1 : \frac{1}{\ddot{u}_2} : \frac{1}{\ddot{u}_3} : \dots : \frac{1}{\ddot{u}_p}
 \end{aligned}$$

$$H' = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\ddot{u}_2} & -\frac{1}{\ddot{u}_3} & \dots & -\frac{1}{\ddot{u}_p} \\ \frac{1}{\ddot{u}_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{\ddot{u}_3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\ddot{u}_p} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{ mit } \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ i_p \end{bmatrix} = H' \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}$$

Ein idealer p-Tor Übertrager kann stets mit Hilfe von (p-1)-Zweitor-Übertragern realisiert werden.



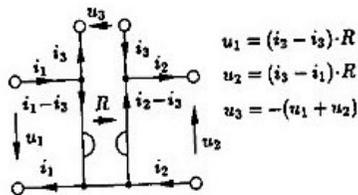
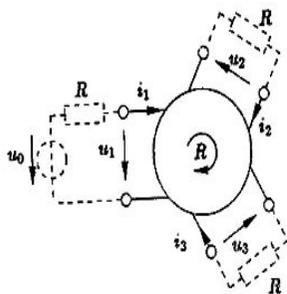
(Dreitor-) Zirkulator

$$M=1, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & -R & +R \\ +R & 0 & -R \\ -R & +R & 0 \end{bmatrix}, \quad R = -M^{-1} \cdot N = -N = -R^T \Rightarrow \text{verlustlos, nicht reziprok}$$

$$[u_1 \ u_2 \ u_3] \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = 0$$

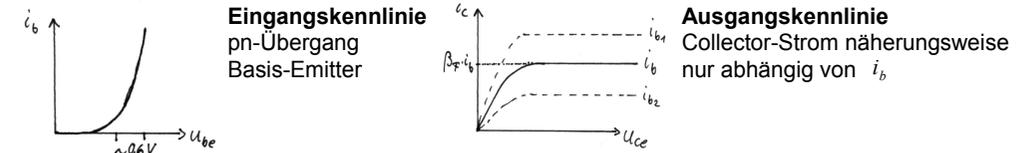
Leistungen, wenn alle Widerstände gleich sind:

$$p_1 = u_1 \cdot i_1 = \frac{u_1^2}{4R}, \quad -p_2 = -u_2 \cdot i_2 = p_1, \quad -p_3 = -u_3 \cdot i_3 = 0$$



Bipolar-Transistoren:

Kennlinie npn



vollständiges resistives Ebers-Moll-Modell der Basisschaltung des npn-Transistors

$$\begin{aligned}
 i_e &= -I_{SE} \cdot \left(e^{\frac{u_{eb}}{U_T}} - 1 \right) + \alpha_R \cdot I_{SC} \cdot \left(e^{\frac{u_{cb}}{U_T}} - 1 \right) \\
 i_c &= \alpha_F \cdot I_{SE} \cdot \left(e^{\frac{u_{eb}}{U_T}} - 1 \right) - I_{SC} \cdot \left(e^{\frac{u_{cb}}{U_T}} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

npn: Dioden+VZ umdrehen!

Vereinfachung für Vorwärtsbetrieb der Basisschaltung

(Verwendung immer, wenn α_F gegeben ist)

Bedingung für Vorwärtsbetrieb: $u_{be} \geq 0$ und $u_{bc} \leq 0$ (Collectordiode sperrt!)

$$\begin{aligned}
 i_e &= -I_{SE} \cdot \left(e^{\frac{u_{eb}}{U_T}} - 1 \right) \\
 i_c &= -\alpha_F \cdot i_e
 \end{aligned}$$

Gilt nur im Vorwärtsbetrieb!

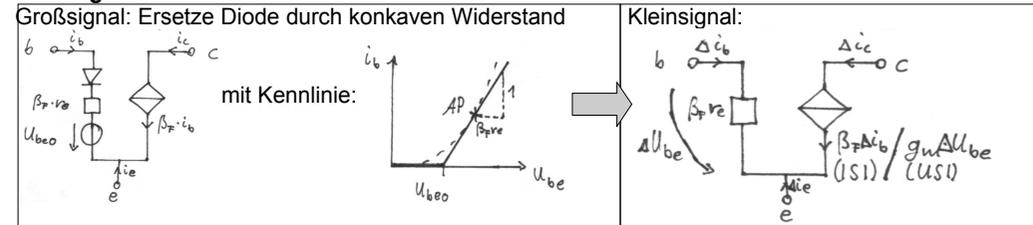
Vorwärtsbetrieb der Emitterschaltung

(Verwendung immer, wenn β_F gegeben ist)

Bedingung für den Vorwärtsbetrieb muss erfüllt sein!

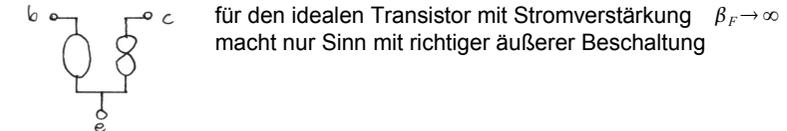
$$\begin{aligned}
 i_b &= I_S \cdot \left(e^{\frac{u_{be}}{U_T}} - 1 \right) \\
 i_c &= \beta_F \cdot i_b
 \end{aligned}$$

Kleinsignal-Ersatzschaltbild



Linearisierung: $i_{b,lin} = I_B + \frac{1}{r_e \cdot \beta_F} \cdot \Delta u_{be}$ $i_c = I_C + \frac{1}{r_e} \cdot \Delta u_{be}$ bzw. $i_c = I_C + \beta_F \cdot \Delta i_b$ $r_e = \frac{U_T}{-I_E}$ $g_m = \frac{1}{r_e}$

Nullmodell



Besonderheiten von pnp

Kleinsignale-ESB ist identisch zu npn!

$$i_b = -I_S \cdot \left(e^{\frac{-u_{bc}}{U_T}} - 1 \right)$$

$$i_c = \beta_F \cdot i_b \leq 0 \text{ da } i_b \leq 0$$

Dioden zeigen in die andere Richtung \Rightarrow Vorzeichen der Arbeitspunktgrößen sind umgedreht

z.B. Gleichungen für Emitterschaltung Vorwärtsbetrieb

Achtung: Bedingung für Vorwärtsbetrieb mit umgedrehten Ungleichheitszeichen!
 $\Rightarrow u_{bc} \leq 0 \text{ und } u_{be} \geq 0$

Arbeitspunktbestimmung:

- Kirchhoffgleichungen aufstellen (meist $u = u'$, $i = -i'$ (u', i') sind Quellenkenngrößen)

- (u', i') eliminieren (durch (u', i') ersetzen)

- in Koordinatensystem eintragen, Schnittpunkt der Kennlinien ist Arbeitspunkt

$$U_{bc} = U_0 + R_i i_c \text{ Quellenkennlinie } Q$$

$$U_{bc} = U_0 - R_i i_c \text{ externe Quellenkennlinie } Q^x \Rightarrow U_{bc} = 0 \text{ (LL)} \Rightarrow U_0 = R_i i_0 \text{ (KS) (bei } Q^x \text{)} \Rightarrow$$

$$i_0 = \frac{R_i}{U_0}$$

\Rightarrow Punkte $(U_0, 0)$ und $(0, i_0)$ einzeichnen und als Gerade verbinden (Q^x)

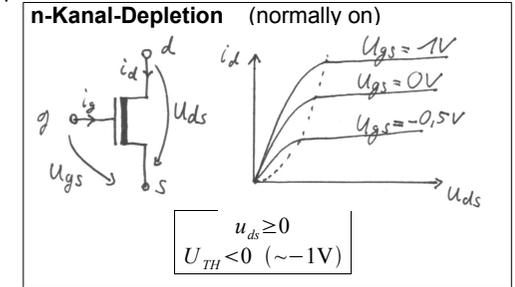
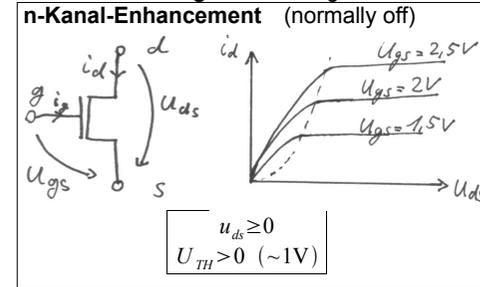
- Schnittpunkt Q^x mit Transistorkennlinie ist **AP**

- im Eingangskennlinienfeld haben kleine Änderungen der Steigung von Q^x eine große Verschiebung des AP zur Folge!

Feldeffekt-Transistoren (FET):

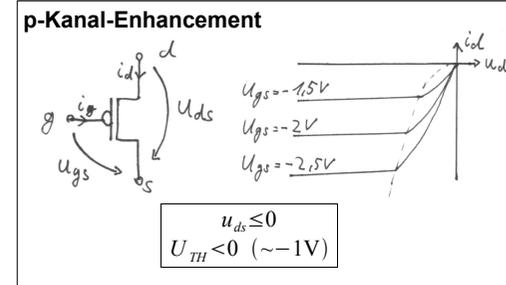
MOS-FET: Metal-Oxid-Semiconductor FET

CMOS-Technologie: Schaltung aus n-Kanal- und p-Kanal-FETs



für n-Kanal-FETs:

$$i_d = \begin{cases} 0 & \text{für } u_{gs} - U_{TH} \leq 0 \text{ (Sperrbereich)} \\ \beta \cdot \left[(u_{gs} - U_{TH}) \cdot u_{ds} - \frac{1}{2} u_{ds}^2 \right] & \text{für } 0 \leq u_{gs} - U_{TH} \leq u_{ds} \text{ (linearer Bereich)} \\ \frac{1}{2} \beta \cdot (u_{gs} - U_{TH})^2 & \text{für } 0 \leq u_{gs} - U_{TH} \leq u_{ds} \text{ (Sättigungsbereich)} \end{cases}$$

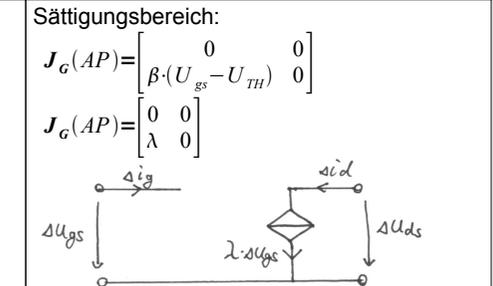
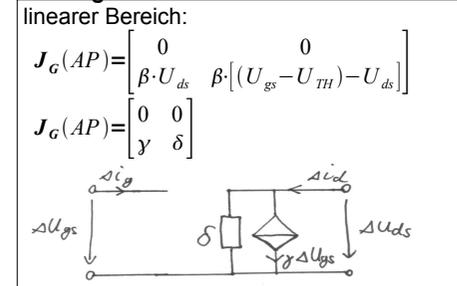


Kanallängenmodulation:
 für n-Kanal: $i_d' = i_d \cdot (1 + \lambda \cdot u_{ds})$
 für p-Kanal: $i_d' = i_d \cdot (1 - \lambda \cdot u_{ds})$

für p-Kanal-FETs:

$$i_d = \begin{cases} 0 & \text{für } u_{gs} - U_{TH} \geq 0 \text{ (Sperrbereich)} \\ -\beta \cdot \left[(u_{gs} - U_{TH}) \cdot u_{ds} - \frac{1}{2} u_{ds}^2 \right] & \text{für } 0 \geq u_{gs} - U_{TH} \leq u_{ds} \text{ (linearer Bereich)} \\ -\frac{1}{2} \beta \cdot (u_{gs} - U_{TH})^2 & \text{für } 0 \geq u_{gs} - U_{TH} \leq u_{ds} \text{ (Sättigungsbereich)} \end{cases}$$

Kleinsignal-Ersatzschaltbilder n-Kanal:

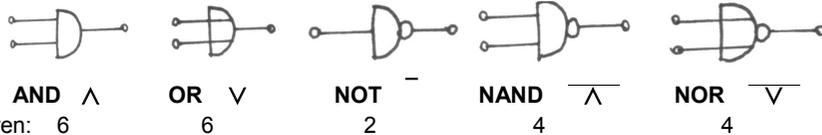


Logik-Schaltungen:

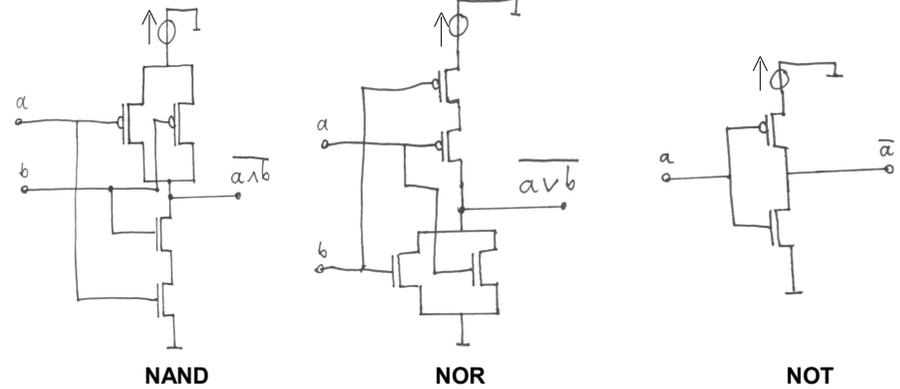
Boolesche Algebra:

Distributivität	$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$	$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
Neutrale Elemente	$a \cdot 1 = a$	$a + 0 = a$
Komplementäres Element	$a \cdot \bar{a} = 0$	$a + \bar{a} = 1$
Involutionsgesetz	$\bar{\bar{a}} = a$	
Idempotenz	$a \cdot a = a$	$a + a = a$
Dominanz	$a \cdot 0 = 0$	$a + 1 = 1$
Absorption	$a \cdot (a + b) = a$	$a + (a \cdot b) = a$
De Morgan (Dualitätsprinzip)	$\overline{(a + b)} = \bar{a} \cdot \bar{b}$	$\overline{(a \cdot b)} = \bar{a} + \bar{b}$
Reihenfolge der Operatoren	Negation vor UND vor ODER	
Darstellung in NAND und NOR	$\bar{a} = a \cdot a = a + a$ $a \cdot b = \overline{(\bar{a} \cdot \bar{b})} = \overline{(a + a) + (b + b)}$ $a + b = \overline{(\bar{a} \cdot \bar{b})} = \overline{(a + b) + (a + b)}$	

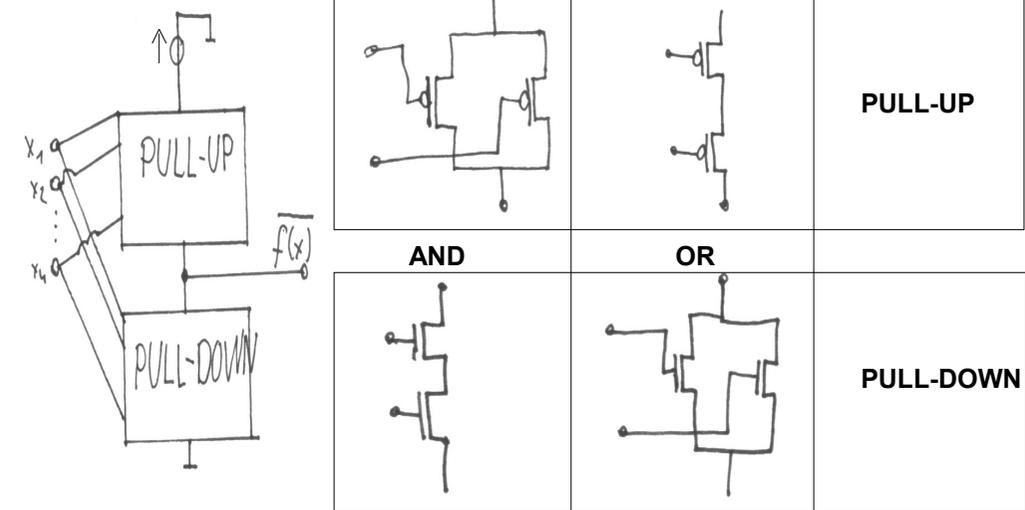
Gatterdarstellung



Gatterrealisierung



CMOS-Direktrealisierung



Funktion aus ANDs und ORs zusammensetzen, jeweils im Pull-UP und Pull-DOWN.

Evtl. Eingangsvariablen vorher invertieren.

ACHTUNG: Ergebnis ist invertiert!

Evtl. das Ergebnis noch zurück invertieren.

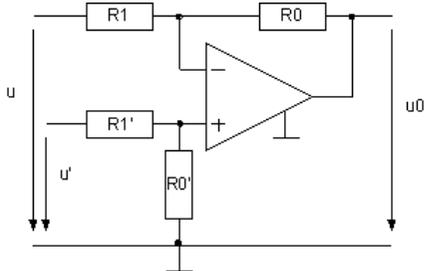
Bsp: Schaltung aus den AND-Bauteilen ergibt ein NAND

Operationsverstärker Ergänzungen:

Rückkopplung:

Operationsverstärker müssen immer **über ihren invertierenden Eingang zurückgekoppelt** werden, da sich sonst eine Z-Kennlinie ergibt und das Verhalten der OP-Amps nicht mehr definiert ist.

Summierer mit zwei Eingängen

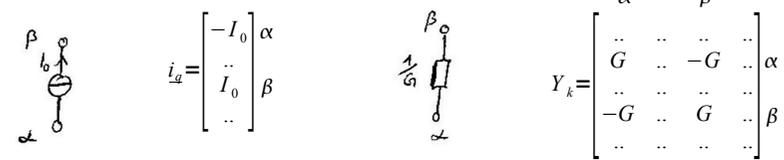


$$u_0 = -\frac{R_0}{R_1}u + \frac{R_0'}{R_0' + R_1'} \frac{R_0 + R_1}{R_1} u'$$

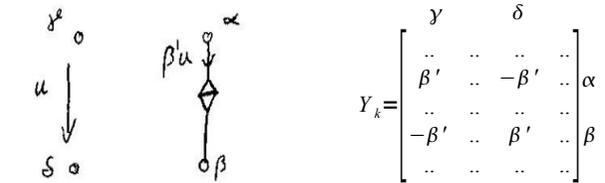
Knotenspannungsanalyse:

Vorgehensweise

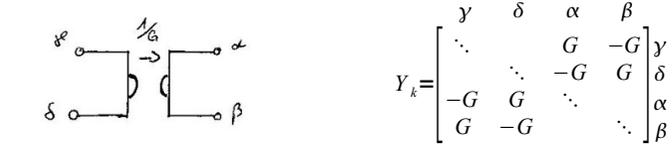
1. evtl. linearisieren
2. Nicht spannungsgesteuerte Elemente ersetzen:
 - mit Gyrator (geht immer)
 - Widerstand → Leitwert
 - Spannungsquellen → Quellenwandlung zu Stromquelle (falls kein Widerstand in Reihe vorhanden ist ergänze R und -R in Reihe)
3. Knoten außer dem Bezugsknoten nummerieren
4. Elemente eintragen
 - (einzelne Einträge in Quellvektor und in der Matrix werden addiert)
 - Konstantstromquellen
 - Widerstand (**Leitwert eintragen**)



- USI (alle anderen umformen)



- Gyrator



- Nullor (ganz zum Schluß eintragen)

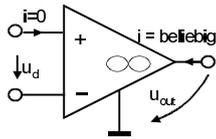
→ Nullator
 Spalten α und β in Y_k Matrix addieren und eine streichen. Entsprechenden Eintrag im u_k - Vektor streichen!

→ Norator
 Zeilen α und β in Y_k Matrix addieren und eine streichen. Entsprechenden Eintrag im i_q Vektor streichen!

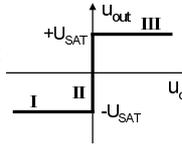
Wenn einer der Knoten Bezugsknoten ist => nur Zeile/Spalte sowie entsprechende Einträge streichen

5. Einträge im u_k Vektor berechnen
 - Gauss Verfahren
 - Satz von Cramer
 - Inverse berechnen
 - durch Einsetzen

Operationsverstärker

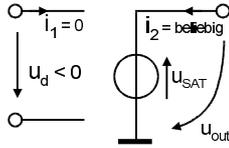


Kennlinie des idealen OpAmps:

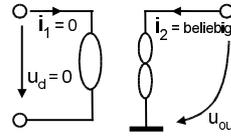


- In den Sättigungsbereichen kennt man u_{out} immer: $u_{out} = \pm U_{SAT}$
- Wird der OpAmp im streng linearen Bereich betrieben, sofort ESB II verwenden!!

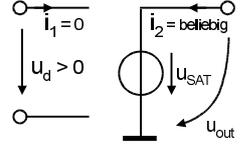
ESB I: $u_d < 0$; $u_{out} = -U_{SAT}$



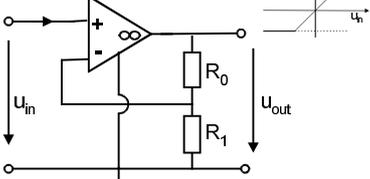
ESB II: $u_d = 0$; $|u_{out}| \leq |U_{SAT}|$



ESB III: $u_d > 0$; $u_{out} = U_{SAT}$



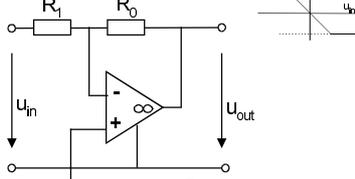
Nichtinvertierender Verstärker:



$$u_{out} = \left(1 + \frac{R_0}{R_1}\right) u_{in}$$

Spannungsverstärkung: $v_u = 1 + \frac{R_0}{R_1}$

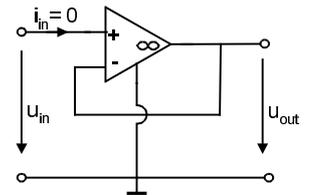
Invertierender Verstärker:



Spannungsverstärkung: $v_u = \frac{R_0}{R_1}$

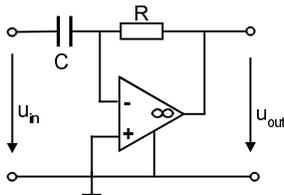
Addierer:
Mehrfacheinkopplung: $u_{out} = -R_0 \sum_i \frac{u_i}{R_i}$

Spannungsfolger: = Nicht invertierender Verstärker
= Impedanzwandler mit $v_u = 1$



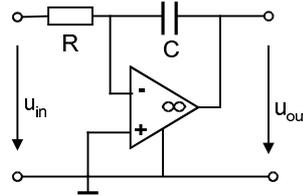
$u_{out} = u_{in}$ Eingang: nicht belastet $i_{in} = 0$
Ausgang: hohe Ströme $v_u = 1$

Differenzierer:



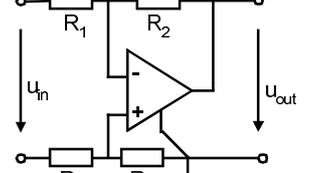
$$u_{out} = -RC \cdot \dot{u}_{in}$$

Integrierer:



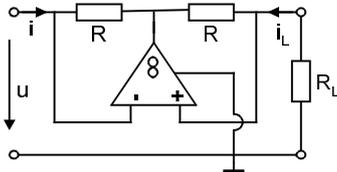
$$u_{out} = -u_c(t_0) - \frac{1}{RC} \int_{t_0}^{t_1} u_{in} dt$$

Potentialdifferenzverstärker:

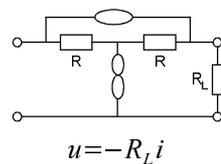


$$u_{out} = \frac{-R_2}{R_1} u_{in} = \frac{-R_4}{R_3} u_{in} \quad \text{Bed. } \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

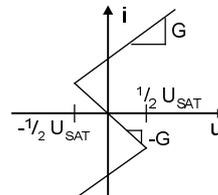
Negativimpedanzkonverter (NIK):



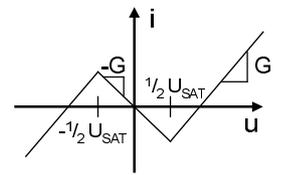
Nullmodell:



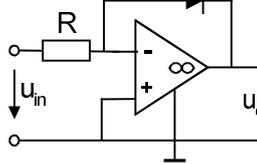
$$u = -R_L i$$



Umpolung des OpAmp:

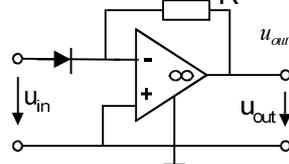


Logarithmierer:



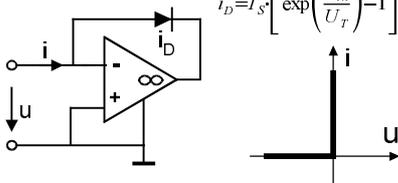
$$u_{out} = -U_T \ln \frac{u_{in}}{R \cdot I_S}$$

Exponentierer:



$$u_{out} = -R \cdot I_S \cdot \exp\left(\frac{u_{in}}{U_T}\right)$$

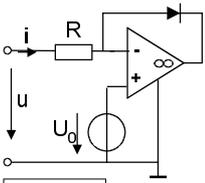
Ideale Diode:



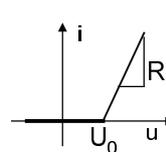
$$i_D = I_S \left[\exp\left(\frac{u_{in}}{U_T}\right) - 1 \right]$$

Umgepolte ideale Diode: pn-Diode umpolen

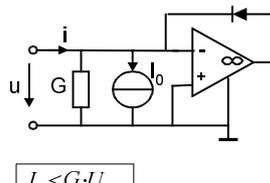
Konkaver Widerstand:



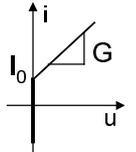
$$U_0 < U_{SAT}$$



Konvexer Widerstand:



$$I_0 < G \cdot U_{SAT}$$



Gyrator:

- Parallelschaltung zweier USI oder Serienschaltung zweier ISU oder: Kettenschaltung eines NIK ($k = -1$) mit einem NII

USU mit $\mu > 1$ = Nichtinvertierender Verstärker

$\mu < 0$ Invertierendem Verstärker und Spannungsfolger in Kette

ISU mit $r < 0$ = Invertierender Verstärker ohne R_i

$r > 0$ zusätzlich invertierenden Verstärker mit $v_u = -1$ nachschalten

Nullator	$u=0$ $i=0$		- streng linear; verlustlos - dual zu sich selbst
Norator	$u=$ beliebig $i=$ beliebig		- streng linear; aktiv - dual zu sich selbst
Leerlauf	$u=$ beliebig $i=0$		- streng linear - dual zum Kurzschluss
Kurzschluß	$u=0$ $i=$ beliebig		- streng linear - dual zum Leerlauf
ohmscher Widerstand	$u=R \cdot i$ $i=G \cdot u$		- streng linear - passiv $R^d = \frac{R^2}{R}$ $G^d = \frac{1}{R^2 G}$
ideale Stromquelle	$u=$ beliebig $i=i_0$		- spannungsgesteuert; aktiv; gepolt - linear; dual zur Spannungsquelle
ideale Spannungsquelle	$u=u_0$ $i=$ beliebig		- stromgesteuert; aktiv; gepolt - linear; dual zur Stromquelle
reale Diode	$u_D = U_T \ln(i_D / I_S + 1)$ $i_D = I_S [\exp(u_D / U_T) - 1]$		- gepolt; passiv $U_T = 25mV$ - quellenfrei $I_S \approx pA$
Photodiode	$i(0) = I_S [\exp(u(t) / U_T) - 1] - i_L(t)$		- gepolt; aktiv
Zenerdiode	$u < U_Z \Rightarrow i$ sehr groß Zehnerdurchbruch		- gepolt; passiv - quellenfrei
Tunneldiode			- gepolt; passiv; quellenfrei - inkremental aktiv !
ideale Diode	$u=0$ für $i > 0$ $i=0$ für $u < 0$		- verlustlos; stückweise linear - dual: umgepolte ideale Diode
Konkaver (G,U) Widerstand	$i=0$ für $u \leq U_0$ $i=G(u-U_0)$ für $u \geq U_0$		- stückweise linear - für $U_0 > 0, G > 0$: passiv, spannungsgesteuert - dual: konvexer Widerstand
Konvexer (R,I) Widerstand	$u=0$ für $i \leq I_0$ $u=R(i-I_0)$ für $i \geq I_0$		- stückweise linear; für $I_0 > 0, R > 0$ stromgest. - dual: konkaver Widerstand
Lineare Quellen			- linear; aktiv - $U_0 = I_0 R$, $I_0 = U_0 G$
Spannungsgest. Stromquelle USI VCCS		$A = \begin{bmatrix} 0 & -1/g \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix}$ $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -g & 0 \end{bmatrix}$ $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Stromgest. Stromquelle ISI CCCS		$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/\beta \end{bmatrix}$ $H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$	
Spannungsgest. Spannungsq. USU VCVS		$A = \begin{bmatrix} 1/\mu & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $H' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mu & 0 \end{bmatrix}$	
Stromgest. Spannungsquelle ISU CCVS		$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/r & 0 \end{bmatrix}$ $R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{bmatrix}$ $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -r & 0 \end{bmatrix}$	
Nullor quellenfrei, streng linear		$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$ $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	
Gyrator, Dualwandler idealer G.: $R_1=R_2=R_d$ verlustlos; $G=-G^T$; $R=-R^T$ Positiv Immittanz Inverter $F_{Gyr} = I^{-d}$		$A = \begin{bmatrix} 0 & R_1 \\ 1/R_2 & 0 \end{bmatrix}$ $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $N = \begin{bmatrix} 0 & R_1 \\ -R_2 & 0 \end{bmatrix}$ $G = \begin{bmatrix} 0 & 1/R_2 \\ -1/R_1 & 0 \end{bmatrix}$ $R = \begin{bmatrix} 0 & -R_1 \\ R_2 & 0 \end{bmatrix}$ $A' = \begin{bmatrix} 0 & -R_2 \\ -1/R_1 & 0 \end{bmatrix}$ $\det A = \det A' = -1$ $R_1 : R_2$	
Idealer Übertrager verlustlos, reziprok, umkehrbar für $\ddot{u} = \pm 1$ Positiv Immittanz Konverter		$A = \begin{bmatrix} \ddot{u} & 0 \\ 0 & 1/\ddot{u} \end{bmatrix}$ $M = \begin{bmatrix} 1 & -\ddot{u} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \ddot{u} & 1 \end{bmatrix}$ $H = \begin{bmatrix} 0 & \ddot{u} \\ -\ddot{u} & 0 \end{bmatrix}$ $H' = \begin{bmatrix} 0 & -1/\ddot{u} \\ 1/\ddot{u} & 0 \end{bmatrix}$ $A' = \begin{bmatrix} 1/\ddot{u} & 0 \\ 0 & \ddot{u} \end{bmatrix}$ $\det A = \det A' = +1$	
NIK Negativ Immittanz Konverter aktiv, antireziprok, für $ k =1$ symmetrisch	$k = 1$: F ist an der i_1 -Achse gespiegelter Zweipol $k = -1$: F ist an der u_1 -Achse gespiegelter Zweipol	$A = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & 1/k \end{bmatrix}$ $M = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1/k \end{bmatrix}$ $k \in \mathbb{R}$ $H = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{bmatrix}$ $H' = \begin{bmatrix} 0 & -1/k \\ -1/k & 0 \end{bmatrix}$ $A' = \begin{bmatrix} -1/k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$	

Analyseverfahren

A Knoteninzenzmatrix
B Schleifeninzenzmatrix

Verbindungsvektor:

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} B' & 0 \\ 0 & A' \end{bmatrix} = \text{Rang}[MN] = b$$

Jede Knotenpunktgleichung steht auf jeder Schleifengleichung senkrecht: $A' B'^T = 0$

Eigenschaften des Verbindungsvektors:

- n Knoten (Nodes)
- b Anzahl der Kanten (Zweige, Branches) = Anz. der Tore p
- Zeitinvariant, streng linear, verlustlos, reziprok

$$\Leftrightarrow U^T I = 0 \quad \text{Tellegen'scher Satz}$$

Baumkonzept (= Schleifenanalyse, oder Schnittmengenanalyse)

Jeder Torspannungsvektor des VMT steht auf jedem Torstromvektor des VMT senkrecht

- Netzwerkgraph zeichnen: Baum muß folgende drei Eigenschaften erfüllen:

- Baum ist ein zusammenhängender Graph - Er enthält alle Knoten - und hat keine Schleifen
- Erst Baumzweige, dann Verbindungskanten fortlaufend nummerieren.
- Es gibt $\det(A A^T)$ verschiedenen Bäume im Netzwerkgraphen.

Anzahl der Baumzweige: $(n-1)$

Anzahl der Verbindungskanten: $s = b - (n-1) = \text{Anzahl der linear unabh. Schleifengleichungen}$
 b Gleichungen

- Aufstellen der linear unabh. Maschengleichungen:

Eine Schleife enthält nur eine Verbindungskante, sonst nur Baumzweige

$$\Rightarrow B \cdot u = [B_b \ E_s] \begin{bmatrix} u_b \\ u_s \end{bmatrix} = 0$$

- Aufstellen der linear unabh. Knotengleichungen:

Superknoten enthält nur eine Baumkante, sonst nur Verbindungskanten

$$\Rightarrow [E_{n-1} \ -B_b^T] \begin{bmatrix} i_b \\ i_s \end{bmatrix} = 0$$

vollständige Beschr. des Verbindungsvektors:

$$\begin{bmatrix} B_b & E_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-1} & -B_b^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_b \\ u_s \\ i_b \\ i_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Knotenspannungsanalyse:

$$\begin{bmatrix} -A^T & E_b & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ u \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$b+(n-1)$ Gleichungen

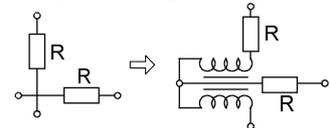
- $(n-1)$ zusätzliche Kanten zwischen Bezugsnoten und übrigen $(n-1)$ Knoten
- diese sind unbeschaltet und dienen ausschließlich als Meßstorte.
- Das Aufstellen des Baumes entfällt
- A kann durch Augenschein aufgestellt werden (A = Knoteninzenzmatrix)
- gut bei stark vermaschten Netzwerken ($b \gg n$)

Maschenstromanalyse:

$$\begin{bmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & E_b & -B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ i \\ i_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$(b+s)$ Gleichungen

- nur bei planaren Netzwerken!
- durch ideale Übertrager ($\ddot{u}=1$) kann ein nichtplanarer Graph in einen planaren Graph überführt werden, dabei steigt die Anzahl der Kanten um zwei pro idealem Übertrager
- gut bei schwach vermaschten Netzwerken ($b \approx n$)



Tableaugleichungen:

$$\begin{matrix} KVL \\ KCL \\ Nwel. \end{matrix} \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A \\ M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e \end{bmatrix} \begin{matrix} s \\ (n-1) \\ b \end{matrix}$$

Gleichungen: $2b$

lin. Netzwerkelemente $\Rightarrow Mu + Ni = e$
 e : Erregungsvektor aller unabhängiger Quellen
eindeutige Lösung des Tableaugleichungssystems wenn $\det T(t_0) \neq 0$

- Knotentableausystem:

$$\begin{matrix} KVL \\ KCL \\ Nwel. \end{matrix} \begin{bmatrix} -A^T & E_b & 0 \\ 0 & 0 & A \\ 0 & M & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ u \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e \end{bmatrix} \begin{matrix} b \\ (n-1) \\ b \end{matrix}$$

Gleichungen: $2b+(n-1)$

- Maschentableausystem:

$$\begin{matrix} KVL \\ KCL \\ Nwel. \end{matrix} \begin{bmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & E_b & -B^T \\ M & N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ i \\ i_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e \end{bmatrix} \begin{matrix} s \\ b \\ b \end{matrix}$$

Gleichungen: $2b+s$

- Nichtlineares Tableaugleichungssystem: $\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix} = 0$ $h(u, i, t) = 0$ je p Gleichungen in 2p Variablen

Reduzierte Knotenspannungsanalyse / Maschenstromanalyse:

Umformen des Knotentableausystems:

- red. Knotenleitwertmatrix Y_k
 $Y_k = A Y A^T = A (-N^{-1} M) A^T$

- Knoten-Stromquellenvektor i_q :
 $i_q = -A i_0$ $Y_k u_k = i_q$

$Y =$ Kantenleitwertmatrix
 $Y_k = (n-1)$ Gleichungen

Umformen des Maschentableausystems:

- Maschenwiderstandsmatrix Z_m
 $Z_m = B (-M^{-1} N) B^T$

- Maschen-Stromquellenvektor u_q
 $u_q = -B u_0 = -B M^{-1} e$ $Z_m i_m = u_q$

$Z_m = s$ Gleichungen

6.4.2 Summierer

Durch Kombination von invertierendem und nicht invertierendem Verstärker gelangt man zu einem *Summierverstärker* oder *Summierer*. Unter Verwendung der Hilfsgrößen

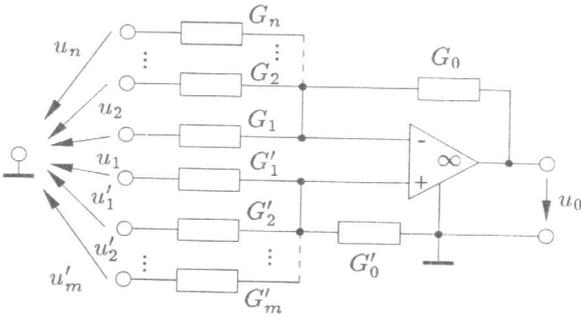


Bild 6.26 Der ideale Op-Amp als Summierer

$$G = \sum_{i=1}^n G_i \quad G' = \sum_{i=1}^m G'_i \quad (6.6)$$

$$K_i = \frac{G_i}{G_0} \quad K'_i = \frac{G'_i}{G_0} \cdot \frac{G}{G'}$$

ergibt sich die Ausgangsspannung zu:

$$u_0 = - \sum_{i=1}^n K_i u_i + \sum_{i=1}^m K'_i u'_i \quad (6.7)$$

Ein Summierer kann also eine beliebige Linearkombination von Eingangsspannungen bilden.

Gesteuerte Quellen:

ISU	<p>$i_1 = 0$ $u_1 = 0$ $R = -r$ $u_2 = -i_1 \cdot R$</p>
USU	<p>$i_1 = 0$ $\mu \geq 1$ $u_1 = i \cdot R_1$ $u_2 = i \cdot (R_1 + R_2) = u_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$</p>
USI	<p>$i_1 = 0$ $g = \frac{\mu}{R}$ $i_2 = g \cdot u_1 = -\frac{\mu \cdot u_1}{R}$ $u_1 = i \cdot R_1$ $u = u_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) = \mu \cdot u_1$</p>
ISI	<p>$i_1 = 0$ $u_1 = 0$ $u = -i_1 \cdot R$</p>