Stochastische Signale, Mentorgruppe - 09.01.2012

Wiederholung: erzeugende u. charakteristische Funktion

- Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion

$$G_X(z) = E[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_X(k)$$

-> X ist eine diskrete, nicht-negative ZV

-> z - Transformation der Zähldichte $p_X(k)$

$$P(\{X=n\}) = p_X(n) = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dz^n} G_X(z)\right]\Bigg|_{z=0}$$

$$E[X] = \frac{dG_X(z)}{dz}\Bigg|_{z=1}$$

$$Var[X] = \frac{d^2 G_X(z)}{dz^2} - E[X]^2 + E[X]$$

- Momenterzeugende Funktion:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

-> X sei eine reelle ZV

$$M_X(s) = E[e^{sX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x)\, dx$$

$$= E\left[\sum \frac{(sX)^k}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} E[X^k]$$

$$\Rightarrow E[X^n] = \left.\frac{d^n M_X(s)}{ds^n}\right|_{s=0}$$

- charakteristische Funktion

$$\varphi_X(\omega) = E\left[e^{j\omega X}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_X(x)\, dx$$

↳ Sonderfall der momenterzeugenden Funktion, Frequenzvariable $s = \sigma + j\omega$ wird nur auf der imaginären Achse ausgewertet

$$\Rightarrow E[X^n] = \frac{1}{j^n}\left.\left[\frac{d^n}{d\omega^n}\varphi_X(\omega)\right]\right|_{\omega=0}$$

Zentraler Grenzwertsatz

Normierte und zentrierte Summe von einer großen Anzahl von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen (mit $\mu, \sigma < \infty$) ist normalverteilt.

Mathematisch: X_i, i.i.d $\quad E[X_i] = \mu$

$\quad Var[X_i] = \sigma^2$

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\{Z_n \le z\}) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

$$\Gamma\ Var[\sum X_i] \underset{i.A.}{\neq} \sum Var[X_i]$$

$$\underset{X_i \text{ unabh.}}{=} \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] = n\sigma^2 \quad \lrcorner$$

Zusatzaufgabe

Bernoulli-verteilte ZV:

$$p_X(k) = \begin{cases} q & k=1 \\ 1-q & k=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1. ges: $G_X(z)$

Lös: $G_X(z) = E[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_X(k) =$

$$= \sum_{k=0}^{1} z^k p_X(k) = (1-q)z^0 + q \cdot z$$

$$= \underline{1 - q + qz} = 1 - q(1-z)$$

2. $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$G_Y(z) = E[z^Y] = E\left[z^{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] = E\left[z^{X_1} \cdot z^{X_2} \cdot \ldots \cdot z^{X_n}\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{n} E\left[z^{X_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} G_X(z) =$$

$$= (1 - q + qz)^n$$

$\Rightarrow$ charakteristische Funktion eine Binomial-verteilten Zufallsvariableln

3. $$p_Y(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} & k \in \mathcal{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Erinnerung: $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \mathcal{N} = [0; n]$

4. $$G_Y(z) = E[z^Y] = \sum_{i=0}^{n} z^i \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \underbrace{(zq)}_{a}{}^{i} \underbrace{(1-q)}_{b}{}^{n-i} =$$

$$= (zq + 1 - q)^n$$

allg. bin. Formel

5. ges: $E[Y]$

$$G_Y(z) = (zq + 1 - q)^n$$

Lös: $$E[Y] = \left[\frac{d\, G_Y(z)}{dz}\right]\Bigg|_{z=1}$$

$$= n\,(zq + 1 - q)^{n-1} \cdot q \Big|_{z=1}$$

$$= nq$$

6. ges: $Var[Y]$

Lös: $$Var[Y] = \left[\frac{d^2\, G_Y(z)}{dz^2}\right]\Bigg|_{z=1} - E[Y]^2 + E[Y] =$$

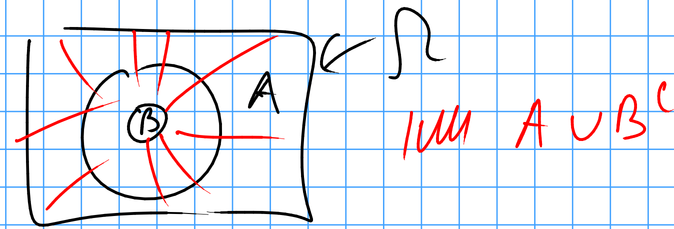
$$= n(n-1)\,(zq + 1 - q)^{n-2} \cdot q^2 \Big|_{z=1} - (nq)^2 + nq =$$

$$= (n^2 - n)\, q^2 - (nq)^2 + nq = nq(1-q)$$

Aufgabe 2

a) f, da gilt $f_X(x) = \frac{d F_X(x)}{dx}$, d.h. $f_X(x)$ ist die Ableitung der kumulativen Funktion ("Steigung"), die stets nur Werte kleiner als Eins annehmen kann.

b) f, die Aussage gilt nur für symmetrische Wahrscheinlichkeitsdichten. (Problem ist $p_X(0)$, das im diskreten Fall i.A. $\neq 0$ ist).

c) r, siehe auch 

d) r, siehe oben (Herleitung)

e) f, X, Y sind unkorreliert, falls $\mathrm{Cov}[X,Y]=0$, d.h. die Kovarianz verschwindet

f) f, es würde richtig sein: Die W'keit der Summe zweier stochastisch unabhängiger ZV erhält man durch Faltung ihrer W'keitsdichtefunktionen.