Stochastische Signale – Mentorgruppe, 6.2.2012

Einführung: Leistungsdichtespektrum (PSD)

Erinnerung: Bei WSS-Zufallsprozessen gilt:

$$r_x(\tau) \le r_x(0) \qquad r_x(\tau) = E[X_{t+\tau} X_t]$$

$$r_x(\tau) = r_x(-\tau) \qquad r_x(0) = E[X_t^2]$$

Leistungsdichtespektrum:

$$S_x(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\, r_x(\tau)$$

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_x(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

$\hat{=}$ Fourier-Transformierte der Autokorrelationsfunktion (Wiener-Chintchin-Theorem)

Eigenschaften:

- $S_x(f) = S_x^*(f)$

  $\Rightarrow S_x(f)$ ist stets reell

- $S_x(f) = S_x(-f)$

  $\Rightarrow S_x(f)$ ist achsensymmetrisch

- $$r_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, df$$

$$r_X(\tau)\Big|_{\tau=0} = r_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\, df$$

$$= E\left[X_t^2\right] = \sigma_X^2 + \mu_{X_t}^2$$

$$X_t \longrightarrow \underset{\text{LTI}}{\boxed{h(t)}} \longrightarrow Y_t \qquad\qquad Y_t = X_t * h(t)$$

$$r_{X,Y}(s,t) = E\left[X_s Y_t\right] = E\left[X_s \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, X_{t-\tau}\, d\tau\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, E\left[X_s X_{t-\tau}\right] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, r_X(s, t-\tau)\, d\tau$$

$$= \left(h *_t r_X\right)(s,t) \quad \Rightarrow \quad \underline{S_{X,Y}(f) = H^*(f) \cdot S_X(f)}$$

$$r_{Y,X}(s,t) = \left(h *_s r_X\right)(s,t) \quad \Rightarrow \quad \underline{S_{Y,X}(f) = H(f)\, S_X(f)}$$

$$r_Y(s,t) = \left(h *_s h *_t r_X\right)(s,t) \quad \Rightarrow \quad \underline{S_Y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_X(f)}$$

Quiz 10

Aufgabe 1

Beh: $r_x(\tau) = r_x(-\tau)$ bei X_t $(t \in \mathbb{R})$ WSS

$$r_x(\tau) = E[X_{t+\tau} X_t]$$

$t = t' - \tau \quad \forall \tau$ (WSS - Eigenschaft)

$$r_x(\tau) = E[X_{t+\tau} X_t] = E[X_{t'} X_{t'-\tau}] =$$

$$= E[X_{t'-\tau} X_{t'}] = r_x(-\tau)$$

Aufgabe 2

Beh: $r_x(0) = \sigma_x^2 + \mu_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\,df$

Bew: $r_x(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S_x(f)$

$$r_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, df$$

$$= \Big|_{\tau=0} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\, df$$

$$r_x(0) = E[X_{t+0} X_t] = E[X_t^2] = \sigma_x^2 + \mu_x^2$$

Aufgabe 3

Frage: Bleibt die WSS-Eigenschaft bei einer Filterung mit einem LTI-System erhalten?

LTI-System: linear time invariant system
$\Rightarrow$ verändert also nichts an den Abstand der einzelnen Prozess glieder

Aufgabe 4

$$S_Y(f) = \underbrace{|H(f)|^2}_{} \cdot S_X(f)$$

↳ eindeutig bestimmbar?

$H(f) \in \mathbb{C}$

$H(f) = |H(f)| \cdot e^{j\varphi(f)}$

Kenntnis von $S_X(f)$ u. $S_Y(f)$ liefert lediglich den Betrag von $H(f)$, nicht jedoch auch dessen Phasengang

Aufgabe 4 Stochastische Prozesse und lineare Systeme (13 Punkte)

Gegeben seien die reellen, im weiteren Sinne stationären (WSS) Zufallsprozesse w_t und n_t mit den Autokorrelationsfunktionen (AKF) $r_w(\tau)$ bzw. $r_n(\tau)$. Die beiden Prozesse werden mit Hilfe zweier linearer zeitinvarianter Systeme gefiltert. Die Anordnung der Systeme ist in Bild 1 dargestellt.

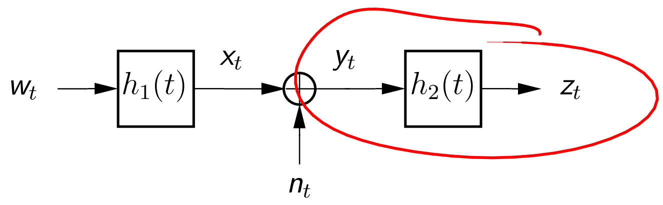

Bild 1: Filterung der stochastischen Prozesse w_t und n_t.

Dabei seien $h_1(t) \circ\!\!-\!\!\bullet H_1(f)$ und $h_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet H_2(f)$ die Impulsantworten bzw. Übertragungsfunktionen der beiden Systeme.

a)* Geben Sie die AKF des Zufallsprozesses y_t in Abhängigkeit von $r_x(\tau)$, $r_n(\tau)$ sowie der Kreuzkorrelationsfunktion $r_{nx}(\tau)$ an.

$$r_Y(\tau) = E[Y_{t+\tau} Y_t] = E[(X_{t+\tau} + N_{t+\tau})(X_t + N_t)] =$$

$$= E[X_{t+\tau} X_t + X_{t+\tau} N_t + N_{t+\tau} X_t + N_{t+\tau} N_t] =$$

$$= r_X(\tau) + r_{XN}(\tau) + r_{NX}(\tau) + r_N(\tau) \underset{\text{WSS}}{=}$$

$$= r_X(\tau) + r_{NX}(-\tau) + r_{NX}(\tau) + r_N(\tau)$$

b) Wie lautet folglich das Leistungsdichtespektrum (LDS) $S_y(f)$ in Abhängigkeit von $S_x(f)$, $S_n(f)$ sowie $S_{nx}(f)$?

$$S_Y(f) \bullet\!\!-\!\!\circ r_Y(\tau)$$

$$S_Y(f) = S_X(f) + \underbrace{S_{NX}^*(f) + S_{NX}(f)}_{=0 \text{ siehe c)}} + S_N(f)$$

Im Folgenden gelte:

$r_{wN}(-\tau)$

$$r_{wn}(\tau) = 0, \;\; \tau \in \mathbb{R}.$$

$\equiv 0$

c)* Zeigen Sie, dass $r_{nx}(\tau) = 0$. Welchen Wert besitzt somit $S_{nx}(f)$?

$$r_{Nx}(\tau) = E[N_{t+\tau}\, X_t] = E\left[N_{t+\tau} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\, W_{t-u}\, du\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} E[N_{t+\tau} W_{t-u}]\, h(u)\, du = (h * r_{N,W})(\tau)$$

$$= h * 0 = \underline{\underline{0}}$$

d)* Geben Sie das LDS von z_t in Abhängigkeit von $S_y(f)$ und $H_2(f)$ an.

$$S_z(f) = |H_2(f)|^2 \cdot S_Y(f)$$

e) Geben Sie nun unter Verwendung der Ergebnisse aus den Teilaufgaben b), c) und d) das LDS von z_t in Abhängigkeit von $S_w(f)$, $S_n(f)$ sowie $H_1(f)$ und $H_2(f)$ an.

$$S_z(f) = |H_2(f)|^2 \cdot \left(|H_1(f)|^2 S_W(f) + S_N(f) \right)$$

$H_1(f) = H_2(f)^{-1}$

Um im ungestörten Fall den Zufallsprozess w_t am Ausgang der Filterkette exakt rekonstruieren zu können, wird nun das so genannte Zero-Forcing Filter

$$H_2(f) = H_1(f)^{-1}$$

verwendet. Außerdem gelte

$$H_2(f) = 1 + \mathrm{j}2\pi f, \qquad S_n(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq f_0, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$\mathrm{E}[w_t] = 0, \qquad \mathrm{E}[z_t] = 0.$$

Des Weiteren sei die Varianz von w_t gegeben durch $\mathrm{Var}[w_t] = \sigma_w^2$.

f)* Berechnen Sie $\mathrm{Var}[z_t]$ unter Verwendung der angegebenen Funktionen $H_2(f)$, $S_n(f)$ sowie σ_w^2 und des Ergebnisses aus Teilaufgabe e).

Hinweis: Falls Sie Teilaufgabe e) nicht gelöst haben, verwenden Sie $S_z(f) = S_w(f) + |\alpha + \mathrm{j}\pi f|^2 S_n(f)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{Var}[z_t] = r_z(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_z(f)\,df$$

$$\Rightarrow S_z(f) = S_w(f) + |1 + j2\pi f|^2 S_n(f)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_w(f) + |1 + j2\pi f|^2 S_n(f) =$$

$$= \sigma_w^2 + \int_{-f_0}^{f_0} 1 + 4\pi^2 f^2\, df =$$

$$= \underline{\underline{\sigma_w^2 + 2f_0 + \frac{8}{3}\pi^2 f_0^3}}$$