Stochastische Signale - Mentorgruppe

Zusatzaufgaben:

http://fabis-site.net/uni/ssl/

=> FVV - 2.11.2011 um 09:45 Uhr

- Wahrscheinlichkeitsraum: $(\Omega, \mathbb{F}, P)$

Ω: Ergebnisraum / Ergebnismenge
Menge aller Ereignisse, die bei einem Zufalls experiment auftreten können bzw. all diejenigen, die den Betrachter interessieren

$\mathbb{F}$: Ereignisalgebra
$\mathbb{F} \subseteq \Omega$: Zusammenfassen von Elementarereignis

Algebra: Mengensystem, dass folgende Eigenschaften erfüllt:

$$\Omega \in \mathbb{F}$$

$*^1$ $$A \in \mathbb{F} \Rightarrow A^c \in \mathbb{F}$$

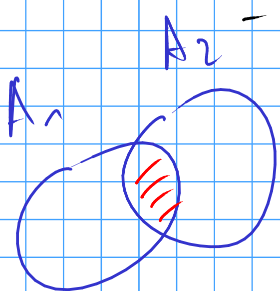
$*^2$ $$A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathbb{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{k} A_i \in \mathbb{F}$$

aus $*^1$ u $*^2$ sowie De-Morgan folgt, dass auch Schnittmengen betrachtet werden können

Eine Algebra (σ-Algebra) ist ein Mengensystem, welches gegenüber endlichen (& abzählbaren) Vereinigungen und Komplementbildung abgeschlossen ist.

P: Wahrscheinlichkeitsmaß

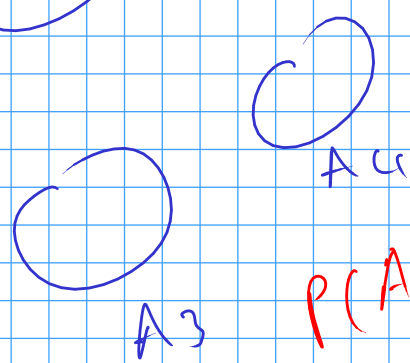
- Nichtnegativität: $P(A) \geq 0$
- Normiertheit: $P(\Omega) = 1$
- Additivitätsatz: $P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$



$P(A_1 \cup A_2) \neq P(A_1) + P(A_2)$

mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$

$\Rightarrow$ A_i u. A_j sind disjunkt



$P(A_3 \cup A_4) = P(A_3) + P(A_4)$

Quiz 1

Beh: zu geg Ω enthält eine mögliche Ereignisalgebra $\mathbb{F}$ stets eine geradzahlige Anzahl an Teilmengen

Algebra: $\Omega \in \mathbb{F}$

(*) $A \in \mathbb{F} \Rightarrow A^c \in \mathbb{F}$

$A_1, A_2, \ldots A_k \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{k} A_i \in \mathbb{F}$

kleinst möglich: $\mathbb{F} = \{\Omega, \emptyset\}$

$|\mathbb{F}| = 2$

größtmögliche: $\mathbb{F} = P(\Omega) = 2^{\Omega}$

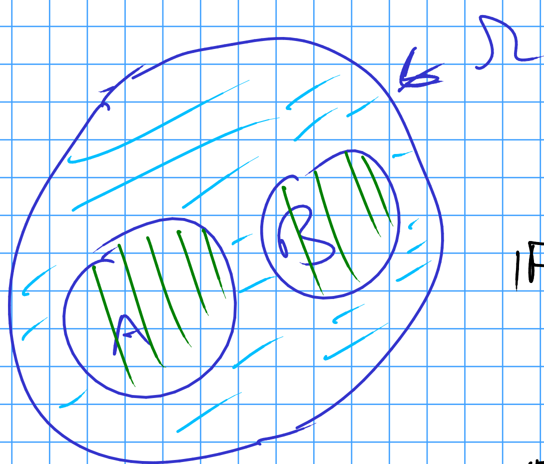
$|\mathbb{F}| = 2^{|\Omega|}$

Beweis durch Eigenschaft (*):
zu jeder Menge muss auch deren komplement in $\mathbb{F}$ enthalten sein, sodass sich stets geradzahlige Mächtigkeiten (Kardinalitäten) ergeben

Aufgabe 2

$A \neq \emptyset \qquad A \cap B = \emptyset$ (disjunkt)

$B \neq \emptyset \qquad A \cup B \neq \Omega$



$(A \cup B)^c$

$$\mathbb{F} = \{\Omega, \emptyset, A, B, A^c, B^c, (A \cup B)^c, (A \cup B)\}$$

$|\mathbb{F}| = 8 = 2^{|\mathbb{G}|} \qquad \mathbb{G} = \{A, B, (A \cup B)^c\}$

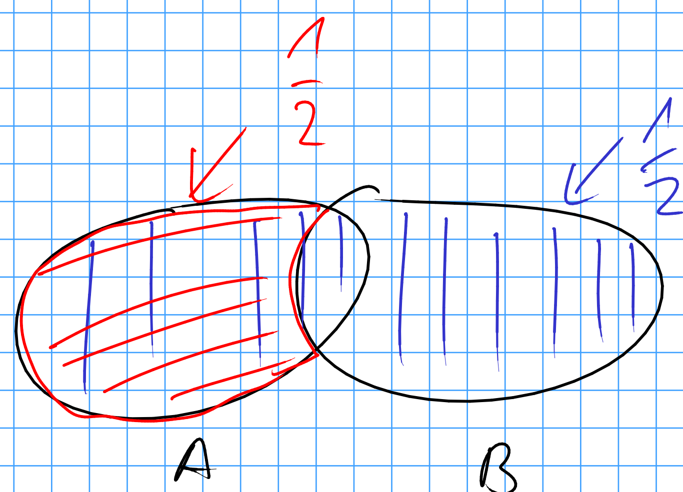
notwendige Menge um Ω disjunkt zu zerlegen

Aufgabe 3

$A, B \neq \emptyset$

$P(A \cup B) = \frac{1}{2}$

$P(A \setminus B) = \frac{1}{2}$



$\Rightarrow P(B) = 0$

$(\mathrm{I})\; P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$(\mathrm{II})\; P(A \setminus B) = P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) - P(A \setminus B)$$

in (I)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) + P(A \setminus B)$$

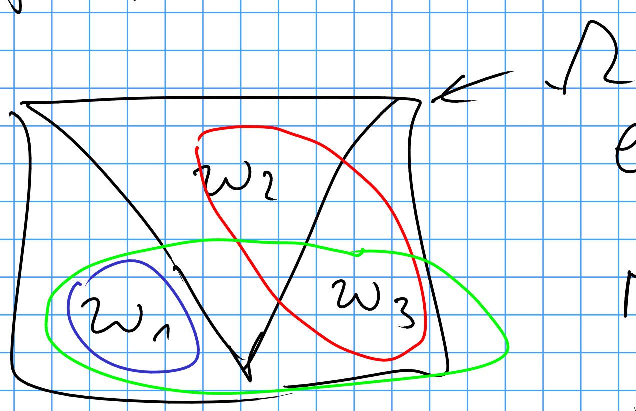
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + P(B)$$

$$\Rightarrow P(B) = 0$$

Zusatzaufgaben

1 a) 2^N Elemente (siehe Quiz Aufg. 1)

b) $\mathcal{G} = \{\{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_3\}\}$



$\mathcal{G}$ liefert bereits eine Möglichkeit, eine disjunkte Zerlegung zu erreichen

$|\mathbb{F}| = 2^3 = 8$

$\mathbb{F} = \{\Omega, \emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_3\},$

$\{\omega_2\}, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}\}$

Aufg.:

$$P(A \cap B \cap C) \geq P(A) + P(B) + P(C) - 2$$

Bew:

allg. $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$

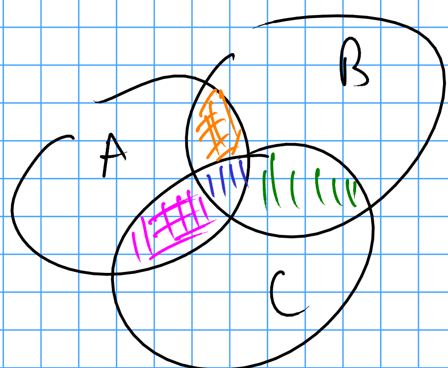
Hinweis:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cup B)}_{\leq 1}$$

folgt aus Abschätzung

$$\geq P(A) + P(B) - 1$$



$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap C \cap B^c) - P(A \cap B \cap C^c) - P(A^c \cap B \cap C) - 2P(A \cap B \cap C)$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap C \cap B^c) - P(A \cap B \cap C^c) - P(A^c \cap B \cap C) - P(A \cap B \cap C) - P(A \cap B \cap C) =$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap C \cap B^c) - P(A \cap B \cap C^c) - P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) =$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow P(A\cap B\cap C) = {} & P(A) + P(B) + P(C) \\
& - \underbrace{\big(P(A\cap B^c\cap C) + P(A\cap B\cap C^c) + P(B\cap C)\big)}_{\leq \underbrace{P(A\cup B\cup C)}_{\leq 1}} \\
& - P(A\cup B\cup C)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow P(A\cap B\cap C) \geq P(A) + P(B) + P(C) \underbrace{-2}
$$

folgt aus der Abschätzung von $2P(A\cup B\cup C)$