

1 Wahrscheinlichkeitsräume

→ mathematische Beschreibung als Tripel (Ω, \mathbb{F}, P)

- Ω : Ergebnisraum, Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments
- \mathbb{F} : Ereignisalgebra, die die Anforderungen einer Algebra erfüllt:

$$\begin{aligned}\Omega &\in \mathbb{F} \\ A \in \mathbb{F} &\Rightarrow A^c \in \mathbb{F} \\ A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathbb{F} &\Rightarrow \bigcup_{i=1}^k A_i \in \mathbb{F}\end{aligned}$$

Ist also ein Erzeugendensystem \mathbb{G} gegeben und soll überprüft werden, ob dieses Erzeugendensystem bereits eine Ereignisalgebra darstellt, so müssen obige drei Bedingungen erfüllt sein: Ω und \emptyset müssen entsprechend stets in \mathbb{F} enthalten sein, die anderen Elemente finden sich durch Komplement- und Vereinigungsbildung.

- P : Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\begin{aligned}P(A) &\geq 0 \\ P(\Omega) &= 1 \\ P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \text{ wenn } A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j\end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich die folgenden, mitunter äußerst nützlichen Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}P(A^c) &= 1 - P(A) & P(\emptyset) &= 0 \\ P(A \setminus B) &= P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) & P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ A \subset B &\Rightarrow P(A) \leq P(B) & P\left(\bigcup_{i=1}^k A_k\right) &\leq \sum_{i=1}^k P(A_i)\end{aligned}$$

2 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

→ Definition: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $P(B) \neq 0$

→ Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit ($\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$):

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

→ Satz von Bayes

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i \in I} P(A|B_i)P(B_i)}$$

→ Mit Hilfe des Gesetzes der totalen Wahrscheinlichkeit und dem Satz von Bayes ist es möglich, die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, falls untersuchtes Ereignis und Bedingung ihre Rolle tauschen.

→ Stochastische Unabhängigkeit: Ereignisse A, B unabhängig, falls $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ bzw. $P(A|B) = P(A)$

3 Zufallsvariablen

- Definition: (Ω, \mathbb{F}, P) Wahrscheinlichkeitsraum, (Ω', \mathbb{F}') Messraum, eine Funktion X , die Ereignisse ω_i von Ω nach Ω' abbildet, heißt Zufallsvariable;
- Kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilung (KVF, CDF):

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x)$$

- $F_X(x)$ monoton wachsend, d.h. $\frac{dF_X(x)}{dx} \geq 0$
- $F_X(x)$ ist rechtsseitig stetig, d.h. $\forall h > 0 : \lim_{h \rightarrow 0} F_X(x+h) = F_X(x), \forall x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$

Umkehrung dieses Satzes ist möglich, d.h. zu jeder Funktion F , die obige Eigenschaften erfüllt, existiert eine Zufallsvariable X .

- Unterscheidung zwischen **stetigen** (Bildraum \mathbb{R}) und **diskreten** (Bildraum endlich Zufallsvariablen)
- im Falle einer reellen diskreten Zufallsvariable lässt sich $F_X(x)$ mittels der **Zähldichte** (probability mass function, PMF)

$$p_X(x) = P(\{X = x\})$$

wie folgt darstellen

$$F_X(x) = \sum_{\xi \in \Omega'; \xi \leq x} p_X(\xi)$$

- im Falle einer reellen stetigen Zufallsvariable lässt sich $F_X(x)$ mittels der **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion** (probability density function, PDF) wie folgt darstellen

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(\xi) d\xi \quad \Leftrightarrow \quad f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- **Mehrdimensionale Verteilungen:** Geg. sei $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ n-dimensionale Zustandsvariable, für die kumulative Verteilungsfunktion von \mathbf{X} folgt:

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = P(\{\mathbf{X} \leq \mathbf{x}\}) = P(\{X_1 \leq x_1\} \cap \dots \cap \{X_n \leq x_n\})$$

analog zum eindimensionalen Fall folgt:

$$p_{X_1, \dots, X_n} = p(\{\mathbf{X} = \mathbf{x}\})$$

$$F_{X_1, \dots, X_n} = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1, \dots, X_n}(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n$$

- **Marginalisierung:** Durch Integration/Summation über die nicht mehr berücksichtigten Zufallsvariablen erhält man aus der Verbundwahrscheinlichkeitsdichte/Verbund-Zähldichte die Randdichte/Rand-Zähldichte einer oder mehrerer Zufallsvariablen

$$p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2, \dots, x_n} p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$$

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n$$

→ **Unabhängigkeit von Zufallsvariablen:** Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n unabhängig, falls

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$$

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$$

$$p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p_{X_i}(x_i)$$

→ **Bedingte Zufallsvariablen:** Definition entsprechend dem Vorgehen bei Ereignissen

$$F_{X|A}(x|A) = P_A(\{X \leq x\}) = P(\{X \leq x\}|A)$$

$$F_{X|Y}(x|y) = P_Y(\{X \leq x\}) = \frac{P(\{X \leq x\} \cap \{Y = y\})}{P(\{Y = y\})}$$

nur definiert, falls $P(\{Y = y\}) \neq 0$

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{dF_{X|Y}(x|y)}{dx} = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

→ **Funktionen von Zufallsvariablen**

– lineare Funktion $Y = g(X) = aX + b$

$$F_Y(y) = P(\{Y \leq y\}) = P(\{aX + b \leq Y\}) = \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a < 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

⇒ affine Abbildungen verändern den generellen Typ der Verteilung nicht

– allgemeiner Fall $Y = g(X)$

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^K f_X(x_i) \left(\left| \frac{dg(x_i)}{dx} \right| \right)^{-1}, \quad y - g(x_i) = 0, \quad i \in 1, \dots, K$$

4 Stochastische Standardmodelle

→ **Verteilungen diskreter Zufallsvariablen**

– diskrete Gleichverteilung:

$$p_X(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$$

– Bernoulli-Verteilung: zwei Ereignisse (Erfolg $X = 1$, Misserfolg $X = 0$) von Interesse

* Parameter: $p : 0 \leq p \leq 1$

$$* \text{ Zähl-dichte: } p_X(k) = \begin{cases} p, & k = 1 \\ (1 - p), & k = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- * Erwartungswert $E[X] = p$
- * Varianz: $\text{Var}[X] = p(1 - p)$
- * Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion: $G_X(z) = pz + 1 - p$
- Binomialverteilung: stochastisch unabhängige Hintereinanderausführung mehrerer Bernoulli-Experimente
 - * Parameter: $p : 0 \leq p \leq 1, n : n \in \mathbb{N}$
 - * Zähldichte: $p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{(n-k)}$
 - * Erwartungswert: $E[X] = np$
 - * Varianz: $\text{Var}[X] = np(1 - p)$
 - * Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion: $G_X(z) = (pz + 1 - p)^n$
- Poissonverteilung: geht aus der Binomialverteilung durch Bildung des Grenzwertes $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(p, k)$ hervor
 - * Parameter: $\lambda : \lambda = np = \text{const.}$
 - * Zähldichte: $p_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
 - * Erwartungswert: $E[X] = \lambda$
 - * Varianz: $\text{Var}[X] = \lambda$
 - * Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion: $G_X(z) = e^{\lambda(z-1)}$
- Geometrische Verteilung: Modellierung von Warteschlangen-Problemen (typische Fragestellung: „Wann tritt Ereignis X zum ersten Mal auf?“); zusammen mit der Exponentialverteilung einzige *gedächtnislose* Verteilung ($P(\{X > n + k\} | X > n) = P(\{X > k\})$)
 - * Parameter: $p : 0 \leq p \leq 1$
 - * Zähldichte: $p_X(k) = p(1 - p)^{k-1}$
 - * Erwartungswert: $E[X] = \frac{1}{p}$
 - * Varianz: $\text{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2}$
 - * Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion: $G_X(z) = \frac{pz}{1-z+pz}$

→ stetige Verteilungsfunktionen

- stetige Gleichverteilung:
 - * Parameter: $a, b : -\infty < a, b, < \infty$
 - * Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
 - * Erwartungswert: $E[X] = \frac{a+b}{2}$
 - * Varianz: $\text{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$
 - * Charakteristische Funktion: $\varphi_X(\omega) = \frac{e^{j\omega b} - e^{j\omega a}}{j\omega(b-a)}$
- Exponentialverteilung:
 - * Parameter: $\lambda : \lambda > 0$
 - * Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

- * Erwartungswert: $E[X] = \frac{1}{\lambda}$
- * Varianz: $\text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$
- * Charakteristische Funktion: $\varphi_X(\omega) = \frac{\lambda}{\lambda - j\omega}$
- Normalverteilung
 - * Parameter: $\mu : \mu \in \mathbb{R}, \sigma : \sigma > 0$
 - * Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
 - * Erwartungswert: $E[X] = \mu$
 - * Varianz: $\text{Var}[X] = \sigma^2$
 - * Charakteristische Funktion: $\varphi_X(\omega) = e^{j\omega\mu - \frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$

5 Erwartungswert und Varianz

→ Erwartungswert diskreter Zufallsvariablen

$$E[X] = \sum_{x \in \Omega'} x P(\{X = x\}) = \sum_{x \in \Omega'} x p_X(x)$$

Entsprechend folgt für Funktionen von Zufallsvariablen $Y = g(X)$:

$$E[Y] = E[g(X)] = \sum_{x \in \Omega'} g(x) p_X(x)$$

→ Erwartungswert, Varianz (mittlere quadratische Abweichung) und Kovarianz stetiger Zufallsgrößen

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

$$\text{Var}[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$\text{Cov}[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y] = \text{Cov}[Y, X]$$

$$\text{Cov}[X, X] = \text{Var}[X]$$

Entsprechend folgt für Funktionen von Zufallsvariablen $Y = g(X)$:

$$E[Y] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

→ Eigenschaften von Erwartungswert, Varianz und Kovarianz

– Linearität des Erwartungswerts:

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$$

– Ordnungserhaltung

$$X \leq Y \Rightarrow E[X] \leq E[Y]$$

Sind X und Y stochastisch unabhängig, gilt ferner:

$$\mathbb{E}[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

– Eigenschaften der Varianz und Kovarianz

$$\text{Var}[X] = \text{Cov}[X, X]$$

$$\text{Var}[aX + b] = a^2 \text{Var}[X]$$

$$\text{Cov}[aX + b, cY + d] = ac \text{Cov}[X, Y]$$

$$\text{Cov}[X + U, Y + V] = \text{Cov}[X, Y] + \text{Cov}[X, V] + \text{Cov}[U, Y] + \text{Cov}[U, V]$$

– Begriff der Unkorreliertheit zweier Zufallsgrößen: X und Y unkorreliert, falls

$$\text{Cov}[X, Y] = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y]$$

– Begriff der Orthogonalität zweier Zufallsgrößen: X und Y orthogonal, falls

$$\mathbb{E}[XY] = 0$$

→ **Standardisierung von Zufallsvariablen:** X sei reelle Zufallsvariable, μ und σ^2 deren Erwartungswert und Varianz. Die Standardisierung von X ist:

$$Y = \frac{1}{\sigma}(X - \mu) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[Y] = 0, \text{Var}[Y] = 1$$

→ **Korrelationskoeffizient:** Beschreibung der Güte eines möglichen linearen Zusammenhangs zwischen den Zufallsvariablen X und Y :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{Var}[X]} \sqrt{\text{Var}[Y]}} = \frac{c_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y} \in [-1, 1]$$

Interpretation:

$$\rho_{X,Y} = \begin{cases} 1, & \text{falls } Y = aX + b \text{ mit } a > 0 \\ -1, & \text{falls } Y = aX + b \text{ mit } a < 0 \\ 0, & \text{falls } X \text{ und } Y \text{ unkorreliert} \end{cases}$$

6 Erzeugende und charakteristische Funktion

Erzeugende Funktion (diskrete Zufallsvariablen)

→ **Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion:** X sei eine diskrete nichtnegative Zufallsvariable

$$G_X(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) z^k, |z| \leq 1$$

→ **Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerten und Varianzen:**

$$P(\{X = n\}) = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{dz^n} G_X(z) \right]_{z=0}$$

$$\mathbb{E}[X] = \left[\frac{d}{dz} G_X(z) \right]_{z=1}$$

$$\text{Var}[X] = \left[\frac{d^2}{dz^2} G_X(z) \right]_{z=1} - \mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[X]$$

→ **Erzeugende Funktion einer Summe** $Z = \sum_{i=1}^n X_i$ von stochastisch unabh. Zufallsvariablen X_i :

$$G_Z(z) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(z)$$

Charakteristische Funktion (stetige Zufallsvariablen)

→ **Charakteristische Funktion:** X sei eine reelle Zufallsvariable

$$\varphi_X(\omega) = \mathbb{E} \left[e^{j\omega X} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_X(x) dx$$

→ **Berechnung des Erwartungswerts und höherer Momente:**

$$\mathbb{E} [X^n] = \frac{1}{j^n} \left[\frac{d^n}{d\omega^n} \varphi_X(\omega) \right]_{\omega=0}$$

→ **Charakteristische Funktion einer Summe** $Z = \sum_{i=1}^n X_i$ von stochastisch unabh. Zufallsvariablen X_i :

$$\varphi_Z(\omega) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(\omega)$$

Zentraler Grenzwertsatz

Aussage: normierte und zentrierte Summe einer großen Anzahl an unabhängigen und identisch verteilter Zufallsgrößen mit endlichen Erwartungswerten und Varianz ist annähernd standardnormalverteilt

7 Stochastische Prozesse

7.1 Reelle Zufallsfolge

→ **Ensemble und Pfad:** beschreibt unterschiedliche Betrachtungsweise einer Zufallsfolge ($X_n : n \in \mathbb{N}$)

– Ensemble-Darstellung: $S_n : \Omega_n \times \Omega_{n-1} \times \dots \times \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(w_n, w_{n-1}, \dots, w_1) = s_n(w_n, w_{n-1}, \dots, w_1)$$

– Pfad-Darstellung: $S_n = (S_n, S_{n-1}, \dots, S_1) : \Omega^{(n)} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\omega_n = s_n(\omega_n) = (s_n(\omega_n), s_{n-1}(\omega_n), \dots, s_1(\omega_n))$$

→ **Autokorrelations- und Autokovarianzfolge:**

$$r_X(k, l) = \mathbb{E} [X_k X_l]$$

$$c_X(k, l) = r_X(k, l) - \mu_X(k) \mu_X(l)$$

→ **Random Walk:** mathematische Modellierung eines des Vorgangs, dass ein Teilchen bei jedem Schritt (Schrittweite δ) mit der Wahrscheinlichkeit p bzw. $p - 1$ einen Schritt nach rechts oder links macht; die Richtung der einzelnen Schritte ist hierbei unabhängig voneinander:

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \text{ wobei } P(\{X_i = +\delta\}) = p \text{ und } P(\{X_i = -\delta\}) = 1 - p$$

$$E[X_i] = \delta p - \delta(1 - p) = (2p - 1)\delta$$

$$\text{Var}[X_i] = E[X_i^2] - E[X_i]^2 = 4p(1 - p)\delta^2$$

$$E[S_n] = E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = n(2p - 1)\delta$$

$$\text{Var}[S_n] \stackrel{X_i \text{ i.i.d.}}{=} \text{Var}[X_i] = 4np(1 - p)\delta^2$$

→ **Stationarität von Zufallsfolgen:** Folgeelemente sind invariant gegenüber einer Verschiebung der Indizes

Für die Praxis weitaus wichtiger ist die Stationarität im weiteren Sinne, WSS (wide sense stationary):

$$\mu_X(i) = \mu_X(i + k)$$

$$r_X(i_1, i_2) = r_X(i_1 + k, i_2 + k) = r_X(i_1 - i_2) = r_X(\tau), \text{ mit } \tau = i_1 - i_2$$

→ **Konvergenz reeller Zufallsfolgen**

– konvergiert fast sicher (almost surely, a.s.):

$$P\left(\left\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1, X \stackrel{a.s.}{\rightarrow} X$$

– konvergiert in Wahrscheinlichkeit (in probability, p.):

$$P(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) = 0, X_n \stackrel{p.}{\rightarrow} X$$

– konvergiert im quadratischen Mittel (in the mean square sense, m.s.):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[(X_n(\omega) - X(\omega))^2] = 0, X \stackrel{m.s.}{\rightarrow} X$$

– konvergiert in Verteilung (in distribution, d.):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), X_n \stackrel{d.}{\rightarrow} X$$

→ **Markow-Ungleichung**

$$P(\{|X| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{E[|X|]}{\varepsilon}$$

→ **Tschebyschow-Ungleichung**

$$P(\{|X - E[X]| \geq \varepsilon\}) < \frac{\text{Var}[X]}{\varepsilon^2}$$

7.2 Markowketten

→ **Definition Markowkette:**

$$p_{X_{n_k}|X_{n_{k-1}}, \dots, X_{n_1}}(x_{n_k}, \dots, x_{n_1}) = p_{X_{n_k}|X_{n_{k-1}}}(x_{n_k}|x_{n_{k-1}})$$

$$f_{X_{n_k}|X_{n_{k-1}}, \dots, X_{n_1}}(x_{n_k}, \dots, x_{n_1}) = f_{X_{n_k}|X_{n_{k-1}}}(x_{n_k}|x_{n_{k-1}})$$

Interpretation: Die Verteilung einer Zufallsvariable unter der Bedingung einer gegebenen Vergangenheit ($X_{n_{k-1}}, \dots, X_{n_1}$) wird nur von der zeitlich am nächsten liegenden Variablen ($X_{n_{k-1}}$) beeinflusst.

Homogene Markowketten liegen vor, falls die Übergangswahrscheinlichkeiten bzw. Übergangsdichten unabhängig vom Index n sind.

→ Beispiele für Markowketten: Randomwalk ($S_n = \sum_{i=1}^n X_i$) oder $X_n = \prod_{i=1}^n W_i$, mit ($W_i : i \in \mathbb{N}$) paarweise stochastisch unabhängig

→ **Darstellung von gemeinsamen Zähldichten bzw. Wahrscheinlichkeitsdichten:**

$$p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = p_{X_1} \prod_{i=2}^n p_{X_i|X_{i-1}}(x_i|x_{i-1})$$

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1} \prod_{i=2}^n p_{X_i|X_{i-1}}(x_i|x_{i-1})$$

Beispiel für $n = 3$:

$$p_{X_1, X_2, X_3}(x_1, x_2, x_3) = p_{X_3|X_2, X_1}(x_3|x_2, x_1)p_{X_2|X_1}(x_2|x_1)p_{X_1}(x_1) \stackrel{\text{Markow}}{=} p_{X_3|X_2}(x_3|x_2)p_{X_2|X_1}(x_2|x_1)p_{X_1}(x_1)$$

→ **Chapman-Kolmogorow-Gleichung:** beschreibt Möglichkeiten zur Berechnung von m -Schritt Übergangswahrscheinlichkeiten, -dichten der Form $p_{X_{n+m}|X_n}(x_{n+m}|x_n)$, $f_{X_{n+m}|X_n}(x_{n+m}|x_n)$

$$p_{X_{n+m}|X_n}(x_{n+m}|x_n) = \underbrace{\sum_{x_{n+1}} \cdots \sum_{x_{n+m-1}}}_{\text{Marginalisierung}} \prod_{i=n+1}^{n+m} p_{X_i|X_{i-1}}(x_i|x_{i-1})$$

7.3 Reelle Zufallsprozesse

→ **Wiener-Prozess:**

– Definition:

$$S_t = \sum_{i=1}^n X_i u(t - iT)$$

– Eigenschaften:

* Autokovarianzfunktion, Autokorrelationsfunktion

$$\mu_W(t) = E[W_t] = E[W_t - W_0] = 0$$

$$r_W(s, t) = c_W(s, t) = \sigma^2 \min(s, t) \quad (\text{nicht WSS, daher auch nicht stationär!})$$

→ **Poisson-Prozess:**

– Definition:

$$N_t = \sum_{i=1}^{\infty} u(t - T_i), \quad T_i = \sum_{j=1}^i X_j$$

$$P(\{N_t = n\}) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

– Eigenschaften:

- * Zählprozess, die Musterfunktionen sind entsprechend monoton steigend
- * Zeitintervalle zwischen den Inkrementierungen sind unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Parameter λ
- * Autokorrelationsfunktion, Autokovarianzfunktion

$$\mu_N(t) = E[N_t] = E[N_t - N_0] = \lambda t$$

$$r_N(s, t) = \lambda \min(s, t) + \lambda^2 st$$

$$c_N(s, t) = r_N(s, t) - \mu_N(s)\mu_N(t) = \lambda \min(s, t)$$

7.4 Eigenschaften der Korrelationsfunktion von gemeinsam WSS Zufallsprozessen

→ Eigenschaften:

$$r_X(\tau) \leq r_X(0)$$

$$|r_{X,Y}(\tau)| \leq \sqrt{r_X(0)r_Y(0)}$$

$$r_X(\tau) = r_X(-\tau)$$

$$\mathbf{a}^T \mathbf{R}_X \mathbf{a} \geq 0, [\mathbf{R}]_{k,l} = r_X(t_k, t_l)$$

7.5 Leistungsdichtespektrum

→ **Definition:**

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$S_X(f) \bullet \longleftrightarrow r_X(\tau)$$

→ **Eigenschaften:**

$$S_X(f) = S_X^*(f), \forall f \in \mathbb{R}$$

$$S_X(f) = S_X(-f), \forall f \in \mathbb{R}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df = r_X(0) = \sigma_X^2 + \mu_X^2$$

$$S_X(f) \geq 0, \forall f \in \mathbb{R}$$

→ **Zusammenhang Leistungsdichtespektrum und Übertragungsfunktion $A(f)$ eines LTI-Systems**

$$S_Y(f) = |A(f)|^2 S_X(f)$$

$$S_{Y,X}(f) = A(f) S_X(f)$$

$$S_{X,Y}(f) = A^*(f) S_X(f)$$