Aufgabe 4 **Stochastische Prozesse und lineare Systeme** (13 Punkte)

Gegeben seien die reellen, im weiteren Sinne stationären (WSS) Zufallsprozesse w_t und n_t mit den Autokorrelationsfunktionen (AKF) $r_w(\tau)$ bzw. $r_n(\tau)$. Die beiden Prozesse werden mit Hilfe zweier linearer zeitinvarianter Systeme gefiltert. Die Anordnung der Systeme ist in Bild 1 dargestellt.

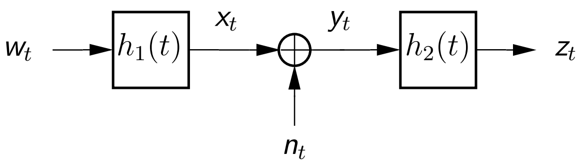

Bild 1: Filterung der stochastischen Prozesse w_t und n_t.

Dabei seien $h_1(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, H_1(f)$ und $h_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, H_2(f)$ die Impulsantworten bzw. Übertragungsfunktionen der beiden Systeme.

a)* Geben Sie die AKF des Zufallsprozesses y_t in Abhängigkeit von $r_x(\tau)$, $r_n(\tau)$ sowie der Kreuzkorrelationsfunktion $r_{nx}(\tau)$ an.

b) Wie lautet folglich das Leistungsdichtespektrum (LDS) $S_y(f)$ in Abhängigkeit von $S_x(f)$, $S_n(f)$ sowie $S_{nx}(f)$?

Im Folgenden gelte:

$$r_{wn}(\tau) = 0,\ \tau \in \mathbb{R}.$$

c)* Zeigen Sie, dass $r_{nx}(\tau) = 0$. Welchen Wert besitzt somit $S_{nx}(f)$?

d)* Geben Sie das LDS von z_t in Abhängigkeit von $S_y(f)$ und $H_2(f)$ an.

e) Geben Sie nun unter Verwendung der Ergebnisse aus den Teilaufgaben b), c) und d) das LDS von z_t in Abhängigkeit von $S_w(f)$, $S_n(f)$ sowie $H_1(f)$ und $H_2(f)$ an.

Um im ungestörten Fall den Zufallsprozess w_t am Ausgang der Filterkette exakt rekonstruieren zu können, wird nun das so genannte Zero-Forcing Filter

$$H_2(f) = H_1(f)^{-1}$$

verwendet. Außerdem gelte

$$H_2(f) = 1 + \mathrm{j}2\pi f, \qquad S_n(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq f_0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\mathrm{E}[w_t] = 0, \qquad \mathrm{E}[z_t] = 0.$$

Des Weiteren sei die Varianz von w_t gegeben durch $\mathrm{Var}[w_t] = \sigma_w^2$.

f)* Berechnen Sie $\mathrm{Var}[z_t]$ unter Verwendung der angegebenen Funktionen $H_2(f)$, $S_n(f)$ sowie σ_w^2 und des Ergebnisses aus Teilaufgabe e).
Hinweis: Falls Sie Teilaufgabe e) nicht gelöst haben, verwenden Sie
$S_z(f) = S_w(f) + |\alpha + \mathrm{j}\pi f|^2 S_n(f)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.