

1 Maxwell'sche Gleichungen

Name des Gesetzes	differentielle Form	integrale Form
Gaußsches Gesetz	$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$	$Q(V) = \iint_{\partial V} \vec{D} d\vec{a}$
Faradaysches Induktionsgesetz	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\int_{\partial A} \vec{E} d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{B} d\vec{a}$
Quellenfreiheit des H-Feldes	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\int \int_{\partial V} \vec{B} = 0$
Ampèresches Durchflutungsgesetz	$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\int_{\partial A} \vec{H} d\vec{r} = \iint_A \vec{j} d\vec{a} + \iint_A \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Die differentielle bzw. integrale Form kann durch Anwendung der Integralsätze von Gauß und Stokes stets in die äquivalente andere Form gebracht werden.

Materialgesetze:

$$\rightarrow \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\rightarrow \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\rightarrow \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

2 Energie von elektromagnetischen Feldern

2.1 Elektrische Energiedichte

→ Herleitung über die Energie einer diskreten Ladungsverteilung: $W_{el} = \frac{1}{8\pi\epsilon} \sum_{i \neq j, i, j=1}^N \frac{q_i q_j}{|r|}$

$$\rightarrow w_{el} = \int_0^{\vec{D}} \vec{E}(\vec{D}') d\vec{D}' = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D} = \frac{1}{2} \frac{|\vec{D}|^2}{\epsilon} = \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}|^2$$

2.2 Magnetische Energiedichte

→ Herleitung über die elektromagnetische Leistung

$$\rightarrow w_{mag} = \int_0^{\vec{B}} \vec{H}(\vec{B}') d\vec{B}' = \frac{1}{2} \vec{B} \vec{H} = \frac{1}{2} \frac{|\vec{B}|^2}{\mu} = \frac{1}{2} \mu |\vec{H}|^2$$

2.3 Poynting Vektor und Bilanzgleichungen

→ Poynting Vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ gibt an, in welche Richtung die Leistung fließt; man spricht auch von der sog. Energiestromdichte

→ speziell für den Poynting Vektor lässt sich folgende Energiebilanzgleichung aufstellen:

$$\operatorname{div} \vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} w_{elmag} = -p_{el}$$

$$\iint_{\partial V} \vec{S} + \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} w_{elmag} = -P_{el}$$

3 Vektorpotential

3.1 Definition

→ skalares Potential Φ : $\vec{E} = -\nabla \Phi$, mit $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ bzw. $\oint_{\partial C} \vec{E} d\vec{r} = 0$ als notwendige Bedingung für dessen Existenz (hinreichend falls betrachtetes Gebiet Ω einfach zusammenhängend (vgl. HM III))

- entsprechend Definition eines Vektorpotentials \vec{A} mit $\text{div}\vec{B} = 0$ als notwendige Bedingung hierfür:
 $B = \text{rot}\vec{A}$
- Vektorpotential dabei nie eindeutig, da beliebiges Gradientenfeld dazu addiert werden kann:
 $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Phi$, Hintergrund hierfür ist die Identität $\text{rot}\nabla(\Phi) \equiv 0$; erlaubt also gewisse Freiheiten, die durch Anwendung von Eichungen gewinnbringend genutzt werden können
- damit lässt sich die bisher nur in der Elektrostatik gültige Formel $\vec{E} = -\nabla\Phi$ für den dynamischen Fall ergänzen:

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\vec{A} = \text{rot}\left(-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right) \\ \text{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right) &= 0 \\ \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} &= -\nabla\Phi \Leftrightarrow \boxed{\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}} \end{aligned}$$

- Maxwell'sche Gleichungen in Vektorpotential Darstellung:
- aufgrund der gewählten Einführung der Potentiale müssen nur noch zwei partielle Differentialgleichungen gelöst werden ($\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$ und $\text{div}\vec{B} = 0$ sind automatisch erfüllt)
 - für die beiden anderen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \boxed{\text{div}(\epsilon\nabla\Phi) + \frac{\partial}{\partial t}\text{div}(\epsilon\vec{A}) = -\rho} \\ \boxed{\text{rot}\left(\frac{1}{\mu}\text{rot}\vec{A}\right) + \epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} + \nabla\left(\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right) = \vec{j}} \end{aligned}$$

3.2 Eichungen

- **Lorenz-Eichung:**

$$\boxed{\text{div}\vec{A} + \epsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\Phi = 0}$$

- nützlich zur Überführung der Maxwell'schen Gleichungen in Vektorpotentialdarstellung in zwei Wellengleichungen
- ferner findet hierbei gleichzeitig eine Entkoppelung statt, d.h. in einer Gleichung kommt nur noch eine gesuchte Größe vor
- zur Herleitung wird die Identität $\text{rot}(\text{rot}\vec{U}) = \nabla(\text{div}\vec{U}) - \Delta\vec{U}$ benötigt (vgl. Springer FS); ein Umstellen dieser Gleichung nach ΔU stellt im übrigen die Definition des Laplace-Operators für Vektorfelder dar – ein komponentenweises Anwenden des skalaren Laplace Operators liefert nämlich nur in *einigen* Koordinatensystemen (z.B. kartesischen Koordinaten) das richtige Ergebnis

$$\underbrace{\left(\Delta - \epsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)}_{\text{Wellenoperator}} \begin{pmatrix} \Phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \rho/\epsilon \\ \mu\vec{j} \end{pmatrix}$$

→ **Coulomb-Eichung:**

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A} = 0}$$

- kann als Spezialfall der Lorenzeichung für den stationären Fall betrachtet werden
- Anwenden dieser Eichung überführt die Maxwell'schen Gleichungen in folgende Ausdrücke

$$\boxed{\operatorname{div}(\epsilon \nabla \Phi) = -\rho}$$

$$\boxed{\Delta \vec{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} - \epsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi = -\mu \vec{j}}$$

- wie man sieht, erhält man also im erstenen Falle die Poisson-Gleichung

3.3 Rand- und Stetigkeitsbedingungen an Materialgrenzen

→ mathematische Formulierung

$$\begin{aligned} \vec{D}_1 \cdot \vec{n} - \vec{D}_2 \cdot \vec{n} &= \sigma_{int} \\ \vec{B}_1 \cdot \vec{n} - \vec{B}_2 \cdot \vec{n} &= 0 \\ \vec{E}_1 \cdot \vec{t} - \vec{E}_2 \cdot \vec{t} &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E}_1 \times \vec{n} - \vec{E}_2 \times \vec{n} = 0 \\ \vec{H}_1 \times \vec{n} - \vec{H}_2 \times \vec{n} &= \vec{i} \end{aligned}$$

→ anschauliche Erklärung

- beim \vec{B} -Feld ist die Normalkomponente (Komponente von \vec{B} senkrecht zur Materialgrenze) stetig; das \vec{D} -Feld weist – sofern eine Oberflächenladung vorhanden ist – in seiner Normalkomponente einen Sprung von σ_{int} auf, ansonsten ist diese auch stetig
- beim \vec{E} -Feld ist die Tangentialkomponente (Komponente von \vec{E} tangentiell zur Materialgrenze) stetig; das \vec{H} -Feld weist – sofern eine Grenzflächenstromdichte vorhanden ist – in seiner Tangentialkomponente einen Sprung von \vec{i} auf, ansonsten ist diese auch stetig

→ Herleitung erfolgt gruppiert nach Art der Maxwell'schen Gleichung ($\operatorname{div} \vec{U} = \gamma, \operatorname{rot} \vec{U} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{V}$) und Anwendung des Satzes von Gauß bzw. Stokes durch Betrachtung einer Zylinderhüllfläche bzw. einer geschlossenen Kurve

4 Gesetz von Biot-Savart

→ nützlich zur Berechnung eines von einem Strom I erzeugten \vec{B} bzw. \vec{H} Feldes für den Fall, dass der Leiter *nicht* unendlich lang und geradlinig sein sollte

→ allgemeine Form kann aus $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ und $A = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r$ hergeleitet werden

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \operatorname{rot} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r$$

→ unter der Annahme eines linienförmigen Leiters mit kleiner räumlichen Ausdehnung kann auch folgende Formulierung abgeleitet werden

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}$$

→ Bedeutung der verwendeten Variablen:

- $\gamma = \gamma(t) \in \mathbb{R}^3$: Kurve die den Verlauf des Leiterstücks beschreibt; je nach Geometrie mag eine abschnittsweise Beschreibung sinnvoll sein
- \vec{r} : Punkt, an dem man den Wert und die Richtung des \vec{B} bzw. \vec{H} Feldes wissen möchte
- \vec{r}' : beschreibt den Integrationsweg, kann also durch $\gamma(t)$ ersetzt werden
- $d\vec{r}'$: differentielles Wegelement, entsprechend der Parametrisierung gilt also $d\vec{r}' = \dot{\gamma}(t)dt$

5 Potentialtheorie

5.1 Unbeschränkter Raum

→ Potential einer Punktladung

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|}$$

→ Potential einer beliebigen Raumladungsverteilung

$$\Phi(\vec{r}) = \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

→ beiden Formeln liegt die Annahme zugrunde, dass $\Phi \rightarrow 0$ für $\vec{r} \rightarrow \infty$

5.2 Beschränkter Raum

5.2.1 Klassifikation von Randwertproblemen

In der Potentialtheorie wird grundsätzlich ein zusammenhängendes Gebiet Ω betrachtet, das ferner auch einen Rand $\partial\Omega$ aufweist. In diesem Gebiet soll nun die Poisson-Gleichung $\text{div}(\epsilon\nabla\Phi) = -\rho$ unter verschiedenen Vorgaben gelöst werden.

→ **Dirichlet RWP**: Vorgabe eines festen Potentials $\Phi|_{\partial\Omega} = \Phi_D$

→ **Neumann RWP**: Vorgabe der Normalenableitung $\frac{\partial\Phi}{\partial\vec{n}}|_{\partial\Omega} = \nabla\Phi \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega}$

→ **Gemischtes RWP**: Vorgabe eines festen Potentials als auch der Normalenableitung auf *disjunkten* Teilen von $\partial\Omega$

5.2.2 Analytische Lösungsverfahren für die Poisson-Gleichung

5.2.3 Greensche Funktion

Da die Herleitung in Büchern hiervon zumeist etwas aufwendig geführt wird, soll diese nachfolgend kurz aufgezeigt werden. Ausgangspunkt bilden die beiden Gesetze der Vektoranalysis ($\Psi, \Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$):

$$\text{div}(\Psi \cdot \nabla\Phi) = \text{div}(\Psi)\nabla\Phi + \Psi\Delta\Phi$$

$$\text{div}(\Phi \cdot \nabla\Psi) = \text{div}(\Phi)\nabla\Psi + \Phi\Delta\Psi$$

Subtraktion der beiden Gleichungen führt zu:

$$\text{div}(\Psi \cdot \nabla\Phi - \Phi \cdot \nabla\Psi) = \Psi\Delta\Phi - \Phi\Delta\Psi$$

Wendet man noch den Satz von Gauß an, so erhält man eine der Greenschen Formeln:

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div}(\Psi \nabla \Phi - \Phi \nabla \Psi) dV &= \iiint_V \Psi \Delta \Phi - \Phi \Delta \Psi dV = \iint_{\partial V} \Psi \nabla \Phi - \Phi \nabla \Psi d\vec{a} \\ &= \iint_{\partial V} \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} da \end{aligned}$$

Nun setze man $\Psi := G(\vec{r}, \vec{r}')$, wobei $G(\vec{r}, \vec{r}')$ eine Funktion sei, die nachfolgende Eigenschaften erfüllt. Außerdem gelte weiterhin: $\Delta \Phi = -\rho/\epsilon$.

$$\begin{aligned} \Delta G(\vec{r}, \vec{r}') &= -\frac{1}{\epsilon} \delta(\vec{r} - \vec{r}') & \forall \vec{r} \in V \setminus \partial V \\ G(\vec{r}, \vec{r}') &= 0 & \forall \vec{r} \in \partial V \end{aligned}$$

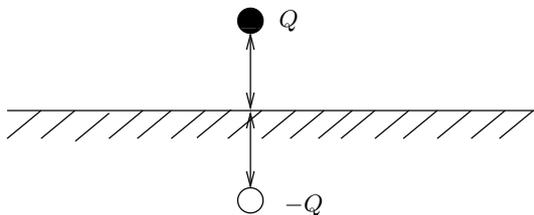
Damit folgt:

$$\begin{aligned} \iiint_V -G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon} + \Phi(\vec{r}') \frac{1}{\epsilon} \delta(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r' &= \iint_{\partial V} G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \Phi(\vec{r}')}{\partial n} - \Phi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} d\vec{a} \\ \Phi(\vec{r}) &= \iiint_V G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') d^3 r' - \epsilon \iint_{\partial V} \Phi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n} da \end{aligned}$$

5.2.4 Spiegelladungsmethode

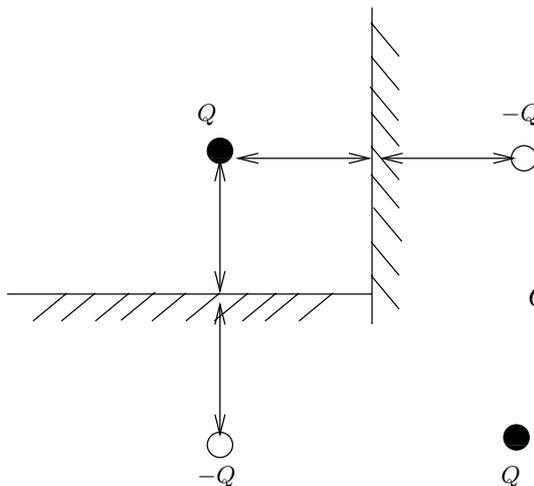
Eine Möglichkeit obige Greenfunktion zu finden besteht in der Methode der Spiegelladung.

→ Halbebene:



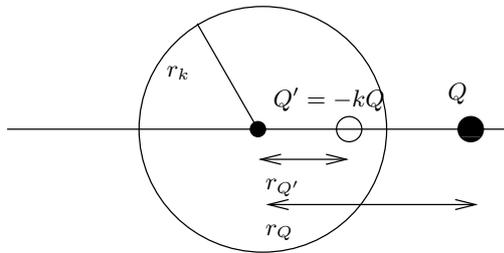
$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_{(1)}|} \right) \\ G(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_{(1)}|} \right) \end{aligned}$$

→ Viertelebene:



$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_{(1)}|} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_{(2)}|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_{(3)}|} \right) \\ G(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_{(1)}|} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_{(2)}|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'_{(3)}|} \right) \end{aligned}$$

- **Weitere keilförmige Geometrien:** Obiges Prinzip ist durchführbar für jedes keilförmige Gebilde, dessen Winkel ein ganzzahliger Bruchteil von 180° ist.
- **Kugel:** hier muss der Krümmung der Kugeloberfläche Rechnung getragen werden, wodurch Ladung und Spiegelladung nicht gleich groß sind



$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{kQ}{|\vec{r} - \vec{r}'_{(1)}|} \right)$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{k}{|\vec{r} - \vec{r}'_{(1)}|} \right)$$

$$r_{Q'} = \frac{r_k^2}{r_Q}$$

$$k = \frac{r_k}{r_Q}$$

- **Zweidimensionale Geometrien:** Auch im 2D Falle ist die Spiegelladungsmethode häufig dazu geeignet, die Greensche Funktion zu ermitteln. Ein wesentlicher Unterschied besteht jedoch in dem Umstand, dass in diesem Falle keine Punktladungen sondern Linienladungen verwendet werden und man damit ein Potential der Form $\Phi(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$ zu Grunde legen muss. Zumeist sind konforme Abbildungen für diese Fälle jedoch besser geeignet. Diese sind im Wintersemester 10/11 aber nicht Stoff der Vorlesung.

5.2.5 Orthogonalentwicklung

Das Ziel bei dieser Methode besteht darin, Eigenlösungen des Laplace Operators zu ermitteln. Ausgehend von einer allgemeinen Poisson-Gleichung im \mathbb{R}^3 der Form $\Delta b = -\lambda b$ und dem Separationsansatz¹ $b = b(x_1, x_2, x_3) = b_1(x_1)b_2(x_2)b_3(x_3)$ ergibt sich:

$$b_1''(x_1)b_2(x_2)b_3(x_3) + b_1(x_1)b_2''(x_2)b_3(x_3) + b_1(x_1)b_2(x_2)b_3''(x_3) = -\lambda b_1(x_1)b_2(x_2)b_3(x_3)$$

$$\underbrace{\frac{b_1''(x_1)}{b_1(x_1)}}_{\lambda_1} + \underbrace{\frac{b_2''(x_2)}{b_2(x_2)}}_{\lambda_2} + \underbrace{\frac{b_3''(x_3)}{b_3(x_3)}}_{\lambda_3} = -\lambda$$

Da λ_1, λ_2 und λ_3 jeweils nur von einer Variable $x_j, j \in \{1, 2, 3\}$ abhängen, können diese jeweils unabhängig verändert werden, ohne dass sich jedoch die Konstante auf der rechten Seite ändert. Dies ist wiederum nur möglich, falls die λ_j selber Konstanten sind.

Dies führt zu drei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, für die eine Lösung sehr leicht gefunden werden kann:

$$b_1''(x_1) = -\lambda_1 b_1(x_1)$$

$$b_2''(x_2) = -\lambda_2 b_2(x_2)$$

$$b_3''(x_3) = -\lambda_3 b_3(x_3)$$

¹häufiger Ansatz zum Lösen partieller DGL, z.B. typisch bei mehrdimensionalen Wellengleichungen

Die allgemeine Lösung hiervon ist: $b_j(x_j) = A_j \sin(k_j x_j) + B_j \cos(k_j x_j)$
 Anschließend sind noch folgende Schritte notwendig:

1. Bestimmung der Konstanten durch Einsetzen der Randbedingungen (geg. durch Geometrie, vorgeg. Potential) und Normierung, aufgrund der besonderen Struktur der obigen Lösung können die k_j zumeist nur diskrete Werte annehmen, d.h. $k_j = f(n), n \in \mathbb{N}$
2. Normieren der gefundenen Lösung: $\int_{-\infty}^{\infty} b_j(x_j) b_j(x_j)^* dx_j = 1$

Der Begriff der Orthogonalentwicklung beruht dabei darauf, dass die Teilfunktionen b_j ein Orthonormalsystem bilden, es gilt also $\langle b_j, b_k \rangle = \delta_{jk}$.

Die Greenfunktion ergibt sich nun aus (mit $b_{123} = b_1(x_1)b_2(x_2)b_3(x_3)$):

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_n b_{123}(\vec{r}) \frac{1}{\lambda_{123}} b_{123}(\vec{r}')$$

5.3 Überblick über entsprechende Korrespondenzen

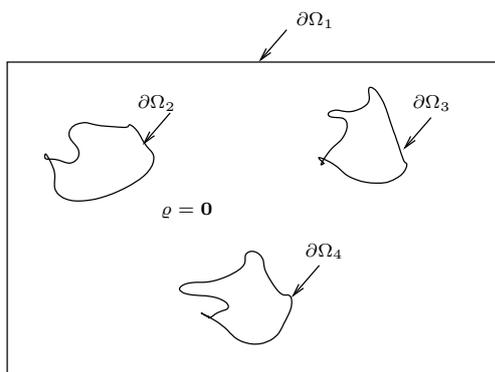
	Elektrostatik	stat. elektr. Strömungen	Magnetostatik	stat. Wärmefluss
Feldgrößen	$(\vec{D}, \varepsilon, \vec{E})$	$(\vec{j}, \sigma, \vec{E})$	(\vec{B}, μ, \vec{H})	$(\vec{J}_Q, \kappa, -\nabla T)$
Across-Größe	$U = \Phi_{el}^+ - \Phi_{el}^-$	$U = \Phi_{el}^+ - \Phi_{el}^-$	$V_{mag} = \Phi_{mag}^+ - \Phi_{mag}^-$	$\nabla T = T_{hot} - T_{cold}$
Through-Größe	$\phi_D = \iint_A \vec{D} d\vec{a}$	$I = \iint_A \vec{j} d\vec{a}$	$\Phi_B = \iint_A \vec{B} d\vec{a}$	$\dot{Q} = \iint_A \vec{J}_Q d\vec{a}$

Das Verhältnis Across-Größe zu Through-Größe entspricht dabei von seiner Bedeutung her stets einem Widerstand.

6 Makromodellierung

6.1 Maxwellische Kapazitätsmatrix

→ Ausgangspunkt hierfür bildet ein abgeschlossenes Raumgebiet, in dem keine Raumladung vorhanden ist



$$\Phi_k|_{\partial\Omega_j} = \delta_{kj}$$

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{i=0}^N \Phi_i V_i$$

→ Für die Ladung auf dem k -ten Kondensator folgt nun:

$$Q_k = \iint_{\partial\Omega_k} \vec{D} \vec{n} da = - \iint_{\partial\Omega_k} \varepsilon \nabla \Phi \vec{n} da = - \sum_{l=0}^N \int_{\partial\Omega_k} \varepsilon \nabla \Phi_l \vec{n} da \cdot V_l = \sum_{l=0}^N C_{kl} V_l$$

→ Maxwellscher Kapazitätskoeffizient:
$$-\iint_{\partial\Omega_k} \varepsilon \nabla \Phi_l \vec{n} da$$

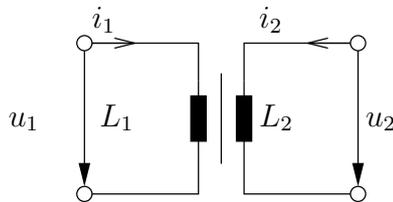
→ Die Koeffizienten lassen sich zu einer Matrix \mathbf{C} zusammenfassen, wobei diese folgende Eigenschaften besitzt:

- positiv semidefinit
- Zeilensumme ist Null: $\sum_{l=0}^N C_{kl} = 0$
- Spaltensumme ist Null: $\sum_{k=0}^N C_{kl} = 0$

→ Gespeicherte Energie:
$$W_{el} = \frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V}$$

6.2 Induktive Bauelemente, Magnetische Kreise

6.2.1 Trafo-Gleichungen



→ Koppelfaktor: $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$

→ Trafogleichungen:

$$u_1(t) = L_1 \frac{\partial}{\partial t} i_1(t) + M \frac{\partial}{\partial t} i_2(t)$$

$$u_2(t) = M \frac{\partial}{\partial t} i_1(t) + L_2 \frac{\partial}{\partial t} i_2(t)$$

6.3 Komplexe Wechselstromrechnung

→ Spannungen und Ströme besitzen sinusoidalen Verlauf der Form

$$u(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \phi_u)$$

$$i(t) = \hat{I} \sin(\omega t + \phi_i)$$

→ Zeigerdarstellung in der komplexen Ebene

$$\hat{U} = \hat{U} e^{j\phi_u}$$

$$\hat{I} = \hat{I} e^{j\phi_i}$$

Entsprechend lassen sich die originalen zeitabhängigen Werte durch Bilden des Imaginärteils wieder erlangen:

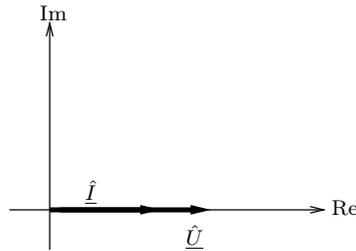
$$u(t) = \text{Im}(\hat{U} e^{j\omega t})$$

$$i(t) = \text{Im}(\hat{I} e^{j\omega t})$$

→ Bauelemente

- Widerstand

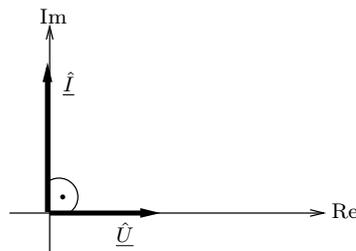
$$\underline{\hat{U}} = R \underline{\hat{I}}$$



– Kapazität

$$\underline{\hat{I}} = j\omega C \underline{\hat{U}}$$

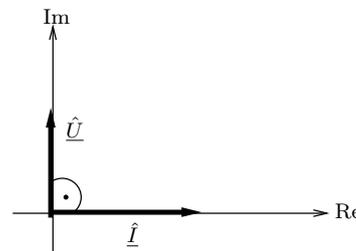
„Strom eilt Spannung voraus.“



– Induktivität

$$\underline{\hat{U}} = j\omega L \underline{\hat{I}}$$

„Spannung eilt Strom voraus.“



→ Leistung/Effektivwerte

– Momentane Leistung: $p(t) = u(t)i(t) = \hat{U}\hat{I} \sin(\omega t + \phi_u) \sin(\omega t + \phi_i)$

– Mittelwert einer periodischen Funktion: $\bar{x}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$

– Effektivwert (= Root Mean Square) einer periodischen Größe: $X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt}$

Im Falle eines sinusoidalen Verlaufs gilt:

$$U_{eff} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

$$I_{eff} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$$

– Komplexer Leistungszeiger: $\underline{P} = \frac{1}{2} \underline{\hat{U}} \underline{\hat{I}}^*$ Hieraus lässt sich die Wirk- und Scheinleistung ableiten:

$$P_W = \text{Re} \underline{P} = U_{eff} I_{eff} \cos(\Delta\phi) = \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} \cos(\Delta\phi)$$

$$P_B = \text{Im} \underline{P} = U_{eff} I_{eff} \sin(\Delta\phi) = \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} \sin(\Delta\phi)$$

7 Elektromagnetische Wellen

7.1 Herleitung der Wellengleichung

Ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} = \sigma \vec{E} + \vec{j}_0 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}\end{aligned}$$

lassen sich folgende Wellengleichungen herleiten.

→ Wellengleichung für \vec{E}

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) &= \nabla(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \nabla\left(\frac{1}{\varepsilon} \varrho_0\right) - \Delta \vec{E} \\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) &= \operatorname{rot}\left(-\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}\right) = -\sigma \mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} - \mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}_0\end{aligned}$$

$$\boxed{\varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} + \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\nabla\left(\frac{\varrho}{\varepsilon}\right) - \mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}_0}$$

→ Wellengleichung für \vec{H}

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{H}) &= \nabla(\operatorname{div} \vec{H}) - \Delta \vec{H} \\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{H}) &= -\sigma \mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{H} + \operatorname{rot}(\vec{j}_0)\end{aligned}$$

$$\boxed{\varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{H} + \sigma \mu \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} - \Delta \vec{H} = \operatorname{rot}(\vec{j}_0)}$$

7.2 Physikalischer Mechanismus der Wellenausbreitung

1. $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$: \vec{B} erzeugt Wirbelfeld \vec{E}
2. $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{j} = \sigma \vec{E}$: \vec{E} polarisiert Ausbreitungsmedium und verursacht \vec{D}
3. $\operatorname{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$: \vec{D} und ggf. \vec{j} erzeugen Wirbelfeld \vec{H}
4. $\vec{B} = \mu \vec{H}$: \vec{H} magnetisiert Medium und erzeugt B

7.3 1D-Wellengleichungen

→ Beschreibende PDGL:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u = 0$$

→ Lösungsansätze durch

- d'Alembertsche Lösung der Form $u(x, t) = f_1(x + ct) + f_2(x - ct)$
- Separationsansatz

7.4 Ebene Wellen

7.4.1 Allgemeine Bemerkungen

→ Hierunter versteht man Wellen, bei denen der geometrische Ort von Punkten gleicher Phase eine Ebene ist; dies bedingt ferner eine an allen Orten gleiche Ausbreitungsrichtung. In der Praxis stellt dies nur eine Vereinfachung dar, im Fernfeld liefert diese Annahme jedoch eine gute Approximation der tatsächlichen Umstände.

→ Lösung der Wellengleichung kann ausgehend vom 1D-Fall übernommen werden:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{k}\vec{r} - ct)$$

Neben der Wellengleichung müssen jedoch auch weiterhin die anderen Maxwell'schen Gesetze erfüllt sein. Dies bedingt durch die Divergenzbedingung stets transversale Wellen².

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \vec{E}_0(\vec{k}\vec{r} - ct) = \vec{k} \cdot \vec{E}'_0(\vec{k}\vec{r} - ct) = 0$$

→ Aus der Kettenregel folgen einige weitere spezielle Differenzierungsregeln, die häufig sehr nützlich sind:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \vec{E}_0(\vec{k}\vec{r} - ct) &= k_{x_j} \cdot \vec{E}'_0(\vec{k}\vec{r} - ct) \\ \nabla \vec{E}_0(\vec{k}\vec{r} - ct) &= \vec{k} \cdot \vec{E}'_0(\vec{k}\vec{r} - ct) \\ \operatorname{rot}(\vec{E}_0(\vec{k}\vec{r} - ct)) &= \vec{k} \times \vec{E}'_0(\vec{k}\vec{r} - ct) \end{aligned}$$

→ Dadurch folgt insbesondere:

$$\begin{aligned} \vec{H}_0 &= \frac{1}{\mu\omega} (\vec{k} \times \vec{E}_0) \\ \vec{E}_0 &= -\frac{1}{\varepsilon\omega} (\vec{k} \times \vec{H}_0) \end{aligned}$$

7.4.2 Harmonische Ebene Wellen

→ Allgemeine Form

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= E_{01} \vec{e}_1 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t - \phi_1) + E_{02} \vec{e}_2 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t - \phi_2) \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\mu\omega} (\vec{k} \times \vec{E}_0) \end{aligned}$$

→ Klassifikation der Polarisierung

- verschiedene Polarisationsrichtungen, beliebige Amplituden, schwankende Phasenbeziehungen: **unpolarisiert**
- gleiche Ausbreitungsrichtung, gleiche Phase, verschiedene Amplituden: **linear polarisiert**

²im Gegensatz dazu stehen Longitudinalwellen, bei denen die Schwingungsrichtung gleich der Ausbreitungsrichtung ist

- gleiche Ausbreitungsrichtung, ungleiche Phase, verschiedene Amplituden: **elliptisch polarisiert**
 - * Spezialfall: $\Phi = \pm \frac{\pi}{2}$
 - $\Phi = \frac{\pi}{2}$: Linksdrehung, linkselliptisch
 - $\Phi = -\frac{\pi}{2}$: Rechtsdrehung, rechtselliptisch
 - * Spezialfall: $E_{01} = E_{02}$: zirkularpolarisiert