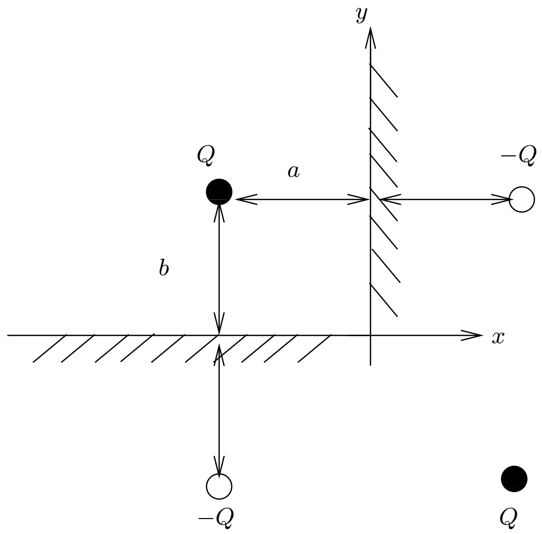
Anmerkungen/Lösungen zu Blatt 6

Aufgabe 13: Winkelplatte



Das Potential berechnet sich offensichtlich als Überlagerung von Punktladungen zu:

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}+\frac{Q_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}+\frac{Q_3}{|\vec{r}-\vec{r}_3|}+\frac{Q_4}{|\vec{r}-\vec{r}_4|}\right)\\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}+\right.\\ &\left.+\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right)\end{aligned}$$

Für die Kraft gilt entweder die bekannte Formel aus EM

$$\vec{F}_{el} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

oder alternativ die Herleitung über $\vec{F}_{el} = Q\vec{E} = -Q\nabla\Phi_{2,3,4}$, wobei die Kenntnis von

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} &= -\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\\ \nabla_{\vec{r}'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} &= \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\end{aligned}$$

sehr vorteilhaft ist.
Mit

$$\nabla\Phi(\vec{r}) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}^3}\begin{pmatrix}x+a\\y-b\\z\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}^3}\begin{pmatrix}x+a\\y+b\\z\end{pmatrix} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}^3}\begin{pmatrix}x-a\\y+b\\z\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}^3}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\\z\end{pmatrix}\right)$$

ergibt sich die Kraft zu:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{el}\left(\begin{pmatrix}-a\\b\\0\end{pmatrix}\right) &= -Q\nabla\Phi_{2,3,4} = \\ &= \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{(2b)^{(3/2)}}\begin{pmatrix}0\\-2b\\z\end{pmatrix} + \frac{1}{(-2a)^{(3/2)}}\begin{pmatrix}-2a\\0\\z\end{pmatrix} - \frac{1}{((-2a)^2+(2b)^2)^{(3/2)}}\begin{pmatrix}-2a\\2b\\z\end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{(a^2+b^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}-a\\b\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/a^2\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1/b^2\\0\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

Zur Berechnung der Oberflächenladungsdichte $\sigma = \vec{D}\cdot\vec{n}$ ist eine Fallunterscheidung hinsichtlich der beiden Halbebenen notnwendig:

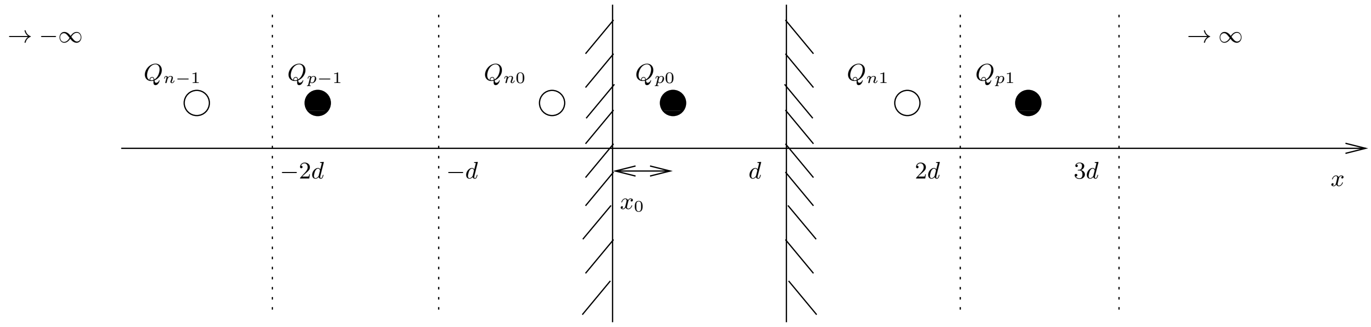
- $\sigma(x<0, y=0) = -\varepsilon\nabla\Phi\vec{e}_y$
- $\sigma(y>0, x=0) = \varepsilon\nabla\Phi\vec{e}_x$

Das Ausrechnen der beiden Ausdrücke und bilden des Skalarprodukts mit den beiden Einheitsvektoren ergibt:

$$\begin{aligned}\sigma_0 = \frac{Q}{4\pi}&\left(-\frac{b}{((x+a)^2+b^2+z^2)^{3/2}} - \frac{b}{((x+a)^2+b^2+z^2)^{3/2}} + \right. \\ &\left. + \frac{b}{((x-a)^2+b^2+z^2)^{3/2}} + \frac{b}{((x-a)^2+b^2+z^2)^{3/2}}\right) = \\ &= \frac{Q}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{((x-a)^2+b^2+z^2)^{3/2}} - \frac{1}{((x+a)^2+b^2+z^2)^{3/2}}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_1 = -\frac{Q}{4\pi}&\left(\frac{a}{(a^2+(y-b)^2+z^2)^{3/2}} - \frac{a}{(a^2+(y+b)^2+z^2)^{3/2}} - \right. \\ &\left. - \frac{a}{(a^2+(y+b)^2+z^2)^{3/2}} + \frac{a}{(a^2+(y-b)^2+z^2)^{3/2}}\right) = \\ &= -\frac{Q}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{(a^2+(y-b)^2+z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(a^2+(y+b)^2+z^2)^{3/2}}\right)\end{aligned}$$

Aufgabe 14: Spiegelladungsmethode an Platten



Nach Durchführen der ersten Spiegelungen wird schnell klar, dass man die geforderten Randbedingungen $\Phi\,|_{\text{Rand}} = 0$ nur durch eine unendliche Anzahl an Spiegelungen von Qp0 und Qn0 erzielen kann.
Leicht ersichtlich ist:

$$x_{pi} = x_i + 2id$$
$$x_{ni} = x_i - 2id$$

Damit folgt:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{(x - x_{pi})^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x - x_{ni})^2 + y^2 + z^2}} \right)$$