EMF Tutorübung – Blatt 4; 26.11.2010

Ausgangspunkt: $\Delta \vec{A} = -\mu \vec{j}$

$$\hookrightarrow \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot} \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \operatorname{rot} \frac{j(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r'$$

<u>NR:</u> $\operatorname{rot}(\vec{a}b) = \vec{a} \times \nabla b + \underbrace{\operatorname{rot}(\vec{a})\, b}_{=0}$

$\vec{a} = \vec{j}(\vec{r}) \qquad b = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

$$\operatorname{rot}(\vec{j}) = \operatorname{rot}(\sigma \vec{E}) = \operatorname{rot}(\sigma(-\nabla \Phi)) = 0$$

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \nabla \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} =$$

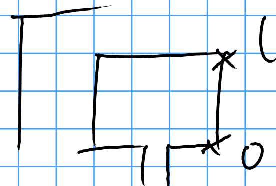
$$= \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V j(\vec{r}) \times \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3} d^3r'$$

$\Rightarrow$ Biot – Savart $\Leftarrow$

$$\vec j(\vec r)\,dV = \underbrace{\vec j(\vec r)\,d\vec a}_{I}\,d\vec r = I\,d\vec r$$

$$\Rightarrow \vec B = \frac{I\mu_0}{4\pi}\int_\gamma \frac{d\vec r'\times(\vec r-\vec r')}{|\vec r-\vec r'|^3}$$

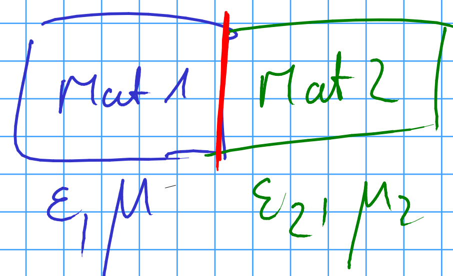


$$\gamma: t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad t\in[0;l]$$

Rand- und Stetigkeitsbedingungen

1. Gruppe:

$$\operatorname{div}\vec D = \rho$$
$$\operatorname{div}\vec B = 0$$



D-Feld: $\vec D_2\cdot\vec n - \vec D_1\cdot\vec n = \sigma_{int}$

B-Feld: $\vec B_2\cdot\vec n - \vec B_1\cdot\vec n = 0$

$\Rightarrow$ Normalkomponente (bezogen zur Oberfläche) ist stetig ($\sigma_{int}\equiv 0$)

2. Gruppe:

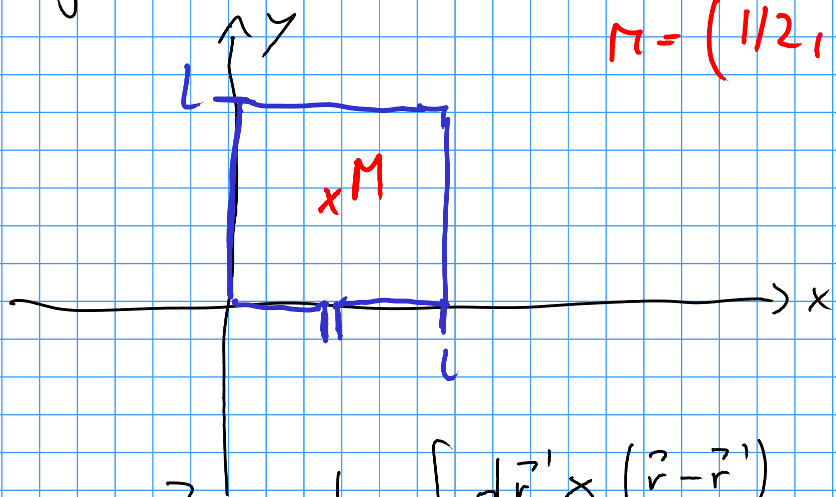
$$\operatorname{rot}\vec E = -\frac{\partial\vec B}{\partial t}$$
$$\operatorname{rot}\vec H = \vec j + \frac{\partial\vec D}{\partial t}$$

E-Feld: $\vec E_1\cdot\vec t - \vec E_2\cdot t = 0 \iff \vec E_1\times\vec n - \vec E_2\times\vec n = 0$

H-Feld: $\vec H_1\cdot\vec t - \vec H_2\cdot\vec t = \vec i$ ↖ Grenzflächenstromdichtevektor

$\Rightarrow$ Tangentielle Komponente stetig (falls $\vec{i} = 0$)

Aufgabe 8



$M = (L/2, L/2)^T$

Lös: $\vec{M} = \frac{1}{4\pi} \int_\gamma \frac{d\vec{r}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$ ges: $\vec{M}\begin{pmatrix} L/2 \\ L/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$

$\gamma_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in [0, L]$

$d\vec{r}\,' = dt\, \vec{e}_x$

$\vec{r} - \vec{r}\,' = \begin{pmatrix} L/2 - t \\ L/2 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L/2 - t \\ L/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3 = \left(\left(\frac{L}{2} - t\right)^2 + \frac{L^2}{4} \right)^{3/2}$

$$\int_{\gamma_1} \frac{d\vec{r}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} = \int_0^L \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L/2 - t \\ L/2 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left(\left(\frac{L}{2} - t\right)^2 + \frac{L^2}{4} \right)^{3/2}}\, dt$$

NR: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L/2 - t \\ L/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L/2 \end{pmatrix}$

$$= \ldots = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l/2 \end{pmatrix} \int_0^l \frac{1}{\left(\left(\frac{l}{2}-t\right)^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{3/2}} \, dt = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l/2 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}\, 4}{l^2}$$

Exkurs: Maxima http://maxima.sourceforge.net/

integrate(1/sqrt((a-x)^2+a^2)^3, 0, 2a);

$$\int \frac{1}{\sqrt{(a-x)^2+a^2}} \, dx = \frac{x}{a^2\sqrt{(x-a)^2+a^2}} - \frac{1}{a\sqrt{(x-a)^2+a^2}}$$

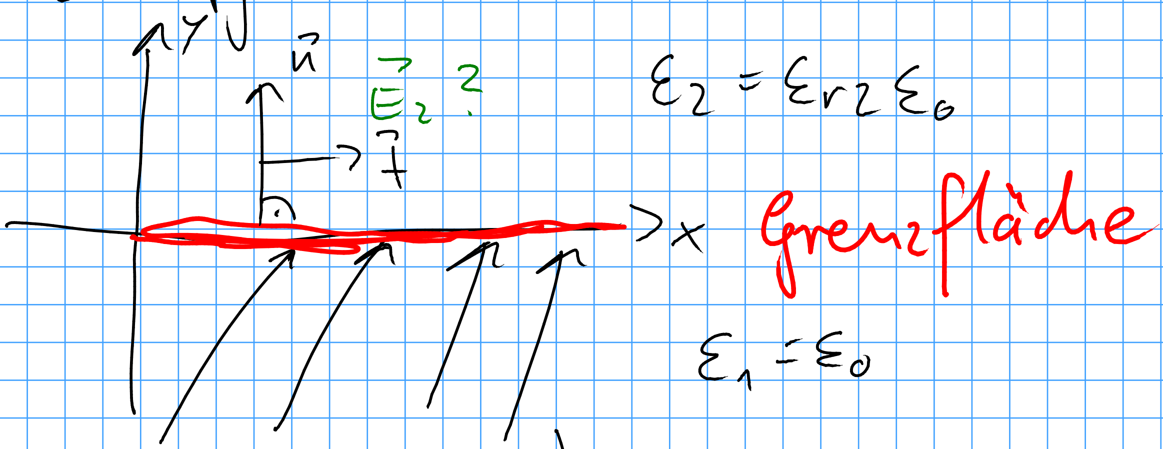
$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in [0; l]$$

$$d\vec{r}\,' = dt\, \vec{e}_y \qquad \vec{r} - \vec{r}\,' = \begin{pmatrix} l/2 - l \\ l/2 - t \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l/2 \\ l/2 - t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{d\vec{r}\,' \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \int_0^l \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -l/2 \\ l/2 - t \\ 0 \end{pmatrix}}{\left(\frac{l^2}{4} + \left(\frac{l}{2}-t\right)^2\right)^{3/2}} \, dt = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l/2 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}\, 4}{l^2}$$

$$\vec{H}\begin{pmatrix} l/2 \\ l/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi} \cdot 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l/2 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2} \cdot 4}{l^2} = \underline{\underline{\frac{1}{\pi} \frac{2\sqrt{2}}{l} \vec{e}_z}}$$

9. Aufgabe



$\varepsilon_2 = \varepsilon_{r2}\varepsilon_0$

$\varepsilon_1 = \varepsilon_0$

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} E_0 \sin\alpha \\ E_0 \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma_{int} = 0$

$$\vec{E}_2 = \begin{pmatrix} E_{2,x} \\ E_{2,y} \\ E_{2,z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{t} = \vec{E} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = E_x$$

bekannt: - tangentiale E-Feld-Komp. stetig (1)
- normale D-Feld-Komp. stetig (2)

$\vec{t} = \vec{e}_x$

$\vec{n} = \vec{e}_y$

aus (1): $E_{2,x} = E_0 \sin\alpha$

$$\vec{D}_1 = \varepsilon_1 \vec{E}_1 = \begin{pmatrix} E_0 \varepsilon_1 \sin\alpha \\ E_0 \varepsilon_1 \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

aus (2): $D_{1,y} = D_{2,y}$

$D_{2,y} = \varepsilon_2 E_{2,y}$

$$\Rightarrow E_{2,y} = \frac{D_{2,y}}{\varepsilon_2} = \frac{E_0 \varepsilon_1 \cos\alpha}{\varepsilon_2} = \frac{E_0 \cos\alpha}{\varepsilon_{r2}}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} E_0 \sin\alpha \\ \frac{E_0}{\varepsilon_{r2}} \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10

Anweisung: elektrostatische Betrachtungsweise: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
In diesem Falle sind folgende Gleichungen gültig:

- $\mathrm{div}\vec{D} = \varrho$
- $\mathrm{div}\vec{B} = 0$
- $\mathrm{rot}\vec{E} = 0$
- $\mathrm{rot}\vec{H} = 0$ (folgt aus dem Umstand, dass keine Oberflächenströme fließen)

Dementsprechend ist die Normalkomponente des $\vec{B}$-Feldes stetig, ebenso wie die Tangentialkomponente von $\vec{E}$ und $\vec{H}$. Die Normalkomponente von $\vec{D}$ hingegen weist einen Sprung um σ auf. Diese Punkte lassen sich wie folgt mathematisch formulieren (der Index 1 bezeichnet dabei das jeweilige Feld im Inneren während der Index 2 das Feld außerhalb der Kugel spezifiziert):

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{e}_r = \sigma$$
$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \vec{e}_r = 0$$
$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{e}_r = 0$$
$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{e}_r = 0$$

Hierbei ist $\vec{e}_r$ der Normalenvektor bzgl. der Kugeloberfläche.