EMF Tutorübung – Blatt 2 (12. 11. 2010)

Wiederholung:

→ skalares Potential: $\mathrm{rot}\,\vec{u} = 0$

$$\Downarrow$$

$$\vec{u} = -\nabla\Phi \quad ; \quad \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

→ vektorielles Potential: $\mathrm{div}\,\vec{u} = 0$

$$\vec{u} = \mathrm{rot}\,\vec{V} \qquad \vec{V}: \text{Vektorpotential von } \vec{u}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{V}' = \mathrm{rot}(\vec{V} + \nabla\chi) = \mathrm{rot}\,\vec{V} + \underbrace{\mathrm{rot}(\nabla\chi)}_{=0}$$

$$= \mathrm{rot}\,\vec{V}$$

⇒ nur bis auf ein Gradientenfeld bestimmt

Quellenfreiheit: $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \iff \vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$

$\vec{A}$: elektromagnetisches Vektorpotential

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\vec{A} = -\mathrm{rot}(\dot{\vec{A}})$$

$$\mathrm{rot}(\vec{E} + \dot{\vec{A}}) = 0 \qquad \vec{E} + \dot{\vec{A}} = -\nabla\Phi$$

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \dot{\vec{A}}$$

neu!

Elektrostatik

$\# \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho$ inhomogen

$\operatorname{div} \vec{B} = 0$ ✓ $\quad \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) \equiv 0$

automatisch erfüllt

$\#\# \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ✓ $\quad \operatorname{rot}(-\nabla \Phi - \dot{\vec{A}}) = \underbrace{\operatorname{rot}(-\nabla \Phi)}_{=0} - \underbrace{\operatorname{rot}(\dot{\vec{A}})}$

$= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div}(\varepsilon \vec{E}) = \operatorname{div}(\varepsilon(-\nabla \Phi - \dot{\vec{A}})) =$$

$$\# \quad \boxed{-\operatorname{div}(\varepsilon \nabla \Phi) - \operatorname{div}(\varepsilon \dot{\vec{A}}) = \rho}$$

$$\operatorname{rot}(\vec{H}) = \operatorname{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu}\right) = \operatorname{rot}\left(\frac{\operatorname{rot} \vec{A}}{\mu}\right) = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\left(-\nabla \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)\right)$$

$$\#\# \quad \boxed{\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A}\right) + \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi = \vec{j}}$$

Lorenz-Eichung: $\underline{\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0}$

Aus (#) wird:

$$-\operatorname{div}(\varepsilon \nabla \Phi) + \varepsilon^2 \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \rho$$

$$-\Delta \Phi + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \rho / \varepsilon$$

$$\Rightarrow \Delta \Phi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\rho / \varepsilon$$

Mit $\text{rot}(\text{rot}\,\vec{A}) = \nabla(\text{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}$ (Springer FS):

$$\frac{1}{\mu}\left(\nabla(\text{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}\right) + \varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi = \vec{j} \quad \Big| \cdot\mu$$

$$\cancel{\nabla\underbrace{(\text{div}\,\vec{A})}_{-\varepsilon\mu\frac{\partial\Phi}{\partial t}}} - \Delta\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t} + \cancel{\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi} = \mu\vec{j}$$

$$\Rightarrow \quad -\Delta\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \mu\vec{j}$$

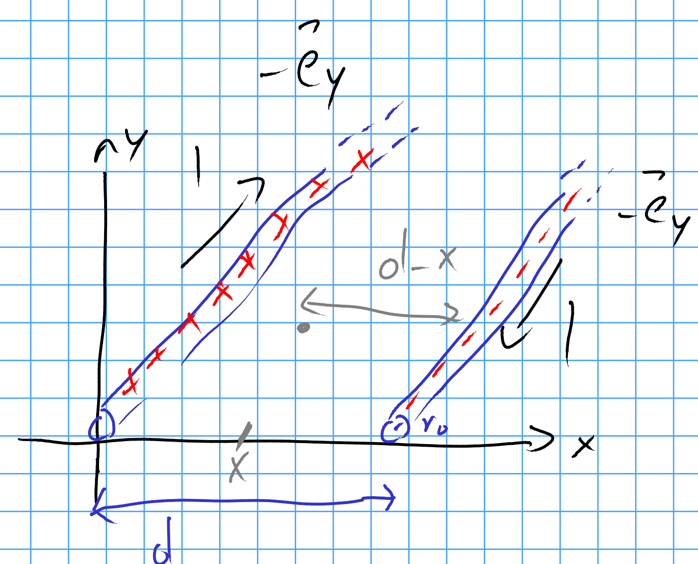
Coulomb-Eichung: $\text{div}\,\vec{A} = 0$

$$\Rightarrow \quad -\text{div}(\varepsilon\nabla\Phi) = \rho \qquad \text{Poisson-Gleichung}$$

$$\Rightarrow \quad -\Delta\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi = \mu\vec{j}$$

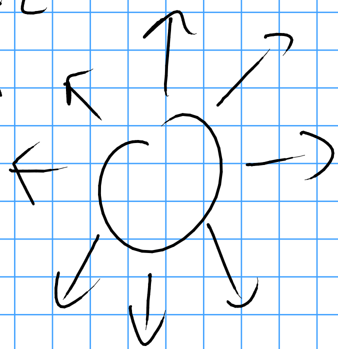
Aufgabe 4: Doppelleitung

geg: $\hat{U} = 10\,\text{kV}$
$\hat{I} = 100\,\text{A}$



a) ges: $\vec{E}$

Lös:



$$\vec{D}(\vec{r}) = D_r(r)\,\vec{e}_r$$

$$Q = \iint_{\partial V} \vec{D}\,d\vec{a} = \int_0^L \int_0^{2\pi} D_r \cdot \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r \, r \, d\varphi \, dz$$

$$= D_r \cdot r \cdot 2\pi \cdot L$$

$$D_r(r) = \frac{Q(V)}{2\pi r L}$$

zwei Leiter: $\vec{D}(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi r_1 L}\vec{e}_r + \frac{-Q}{2\pi r_2 L}\vec{e}_{r_2}$

$r_1 \hat{=} x \qquad \vec{e}_r = \vec{e}_x$

$r_2 \hat{=} d - x \qquad \vec{e}_{r_2} = -\vec{e}_x$

$$= \frac{Q}{2\pi x L}\vec{e}_x + \frac{Q}{2\pi(d-x)L}\vec{e}_x =$$

$$= \frac{Q}{2\pi L}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)\vec{e}_x$$

$$U = \int \vec{E}\,d\vec{r} = \int_{r_0}^{d-r_0} \frac{Q}{2\pi L\varepsilon}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x \, dx =$$

$$= \frac{Q}{2\pi L\varepsilon}\Big[\ln x - \ln(d-x)\Big]_{r_0}^{d-r_0} = \frac{Q}{2\pi L\varepsilon}\ln\frac{x}{d-x}\Bigg|_{r_0}^{d-r_0}$$

$$= \frac{Q}{2\pi L\varepsilon}\ln\left(\frac{d-r_0}{r_0}\right)^2 = \frac{Q}{\pi L\varepsilon}\ln\left(\frac{d}{r_0}-1\right) \approx \frac{Q}{\pi L\varepsilon}\ln\left(\frac{d}{r_0}\right)$$

$$Q = U \pi L \varepsilon \ln\left(\frac{r_0}{d}\right)$$

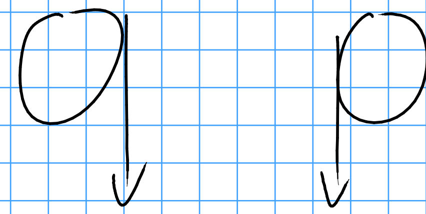
$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{U \pi \cancel{\varepsilon_0} L}{2 \pi \cancel{\varepsilon_0} L} \ln\left(\frac{r_0}{d}\right) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right) \vec{e}_x$$

b) $$\oint_{\partial A} \vec{H}\, d\vec{r} = I(A) \Rightarrow \vec{H} = H_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi = \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = \frac{I}{2\pi x} \vec{e}_{\varphi_1} + \frac{I}{2\pi(d-x)} \vec{e}_{\varphi_2}$$

$$= -\frac{I}{2\pi x} \vec{e}_y - \frac{I}{2\pi(d-x)} \vec{e}_y$$

$$= -\frac{I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right) \vec{e}_y$$



$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$$

c) $$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{U}{2} \ln\left(\frac{r_0}{d}\right) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right) \vec{e}_x \times \frac{-I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right) \vec{e}_y =$$

$$= \frac{-UI}{4\pi} \ln\left(\frac{r_0}{d}\right) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)^2 \vec{e}_z$$

d) $$|\bar{S}| = \frac{1}{T} \int_0^T |S(t)|\, dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\hat{U} \hat{I} \cos^2(\omega t)}{4\pi} \underline{\ln\left(\frac{r_0}{d}\right)} \underline{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)^2} dt$$

$$= \frac{\hat{U} \hat{I} \ln\left(\frac{r_0}{d}\right) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)}{4\pi} \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t)\, dt}_{1/2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\omega t)\right)$$

$$= \frac{\hat{u}\,\hat{I}\,\ln\left(\frac{r_0}{d}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right)}{8\pi}$$

e) $|S|\,\Big|_{x=r_0}$

Aufgabe 5

a) $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$
$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

b) ja, $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

c) ... und von zeitlich sich ändernden Magnetfeldern ...

d) 2PDGL 2. Ordnung (vgl. Seite 2 */**)

e) $\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$

f) automatisch erfüllt (vgl. Seite 3)

g) siehe Seite 2 (+, ++)

h) siehe Seite 2/3

Vorteile: Lorenz-Eichung → Entkopplung in zwei Wellengleichungen

Coulomb-Eichung → Gleichung für Φ ist identisch mit

der Poisson-Gl.,
deren Lösung be-
kannt ist

i) Frage: Gilt

$$\left(\Delta - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{E} \overset{!}{=} 0 \quad ??$$

Beweis für Gültigkeit:

$$\left(\Delta - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(-\nabla \Phi - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}\right) =$$

$$= \Delta\left(-\nabla \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t^2}\right) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(-\nabla \Phi - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\underbrace{\left(-\Delta \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}\right)}_{=0,\ \text{nach Angabe}} = 0$$

$\Rightarrow$ $\vec{E}$ erfüllt also Wellengleichung, analoges Vorgehen für $\vec{B}$.