EMF Tutorübung – Blatt 12, 10.2.2011

Aufgabe 26

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_{0,x}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\,\vec{e}_x + E_{0,y}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\,\vec{e}_y$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = -B_{0,x}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\,\vec{e}_x + B_{0,y}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\,\vec{e}_y$$

[auch möglich komplexer Ansatz: $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$

$\vec{e}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left(\vec{E}(\vec{r},t)\cdot e^{j\omega t}\right)$

z.B. $\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y}\, e^{j\frac{\pi}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$]

a) $\operatorname{div}(\varepsilon\vec{E}) = \rho$

$\Rightarrow$ $\operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \Leftrightarrow \operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{B}}{\mu}\right) = \sigma\vec{E} + \varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

$\Rightarrow$ $\operatorname{div}\vec{B} = 0$

$\vec{k}\cdot\vec{r} = k_x\cdot x + k_y\cdot y + k_z\cdot z$

b) $\operatorname{div}\vec{B} = \partial_x B_x + \partial_y B_y + \underbrace{\partial_z B_z}_{\equiv 0} =$

$= \partial_x\left(-B_{0,x}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\right) + \partial_y\left(B_{0,y}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)\right) =$

$= -B_{0,x}\cdot k_x\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) - B_{0,y}\cdot k_y\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$

$\stackrel{!}{=} 0 \quad \forall\, t\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ einzige Möglichkeit hierfür $k_x = k_y = 0$

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix} \qquad \vec{E} = \begin{pmatrix} E_x' \\ E_y' \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{k}^T \cdot \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{B} = \vec{k} \cdot \vec{B}' = 0$$

$$\text{rot } \vec{B} = \vec{k} \times \vec{B}'$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \vec{B} = k_{x_k} \cdot \vec{B}'$$

Zweiter Schritt: Überprüfung, ob $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y \cancel{E_z} - \partial_z E_y \\ \partial_z E_x - \cancel{\partial_x E_z} \\ \partial_x \cancel{E_y} - \partial_y \cancel{E_x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_z E_y \\ \partial_z E_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_z E_{0,y} \cos(k_z \cdot z - \omega t) \\ -k_z E_{0,x} \sin(k_z \cdot z - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} B_{0,x} \cdot \omega \cdot \cos(k_z \cdot z - \omega t) \\ -B_{0,y} \cdot \omega \cdot \sin(k_z \cdot z - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall t$$

$$k_z \cdot E_{0,y} = B_{0,x} \cdot \omega$$

$$k_z E_{0,x} = B_{0,y} \cdot \omega$$

Dispersionsbeziehung: $\omega = \frac{|\vec{k}|}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{k_z}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$

$$\cancel{\omega} \sqrt{\varepsilon \mu}\, E_{0,y} = B_{0,x} \cdot \cancel{\omega}$$

$$\rightarrow \quad B_{0,x} = \sqrt{\varepsilon \mu} \cdot E_{0,y}$$

$$\rightarrow \quad B_{0,y} = \sqrt{\varepsilon\mu}\, E_{0,x}$$

[exemplarisch: $\mu H_{0,x} = \sqrt{\varepsilon\mu}\, E_{0,y}$

$$\frac{E_{0,y}}{H_{0,x}} = \frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_{F0}$$

$$= 120\pi\,\Omega$$

$$\approx 370\,\Omega$$]

c) (I) $\operatorname{div}(\varepsilon\vec{E}) = \rho$

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \rho/\varepsilon$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \underbrace{\partial_x E_x}_{\equiv 0} + \underbrace{\partial_y E_y}_{\equiv 0} + \underbrace{\partial_z E_z}_{\equiv 0} = 0$$

$$\Rightarrow \rho = 0$$

(II) $\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\vec{B}\right) = \vec{j} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

$$\operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu\vec{j} + \varepsilon\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}B_x\\ B_y\\ B_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\partial_z B_y\\ \partial_z B_x\\ 0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}B_{0,y}\, k_z \cdot \sin(k_z z - \omega t)\\ -B_{0,x} \cdot k_z \cos(k_z \cdot z - \omega t)\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \begin{pmatrix} +E_{0,x}\,\omega \sin(k_z \cdot z - \omega t) \\ -E_{0,y}\,\omega \cos(k_z \cdot z - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{rot}\,\vec{B} = \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{j} \equiv \vec{0}$$

d)

$$\text{div}\,\vec{E} = 0$$

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot}\,\vec{B} = \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{div}\,\vec{B} = 0$$

Wellengleichung 1D-Fall

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\boxed{\text{rot}(\text{rot}(\cdot)) = \text{grad}(\text{div}(\cdot)) - \Delta(\cdot)}$$

$$\text{rot}(\text{rot}\,\vec{E}) = \text{grad}(\text{div}\,\vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

$$= -\Delta \vec{E}$$

$$\text{rot}(\text{rot}\,\vec{E}) = \text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\,\vec{B} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right) = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}$$

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}$$

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0}$$

homogene Wellengleichung für $\vec{E}$

Ergänzung: Laplace-Operator für Vektorfelder

Skalarfelder
$$\begin{cases} f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ \Delta f = \nabla^2 f = \partial_{x_1}^2 f + \partial_{x_2}^2 f + \dots + \partial_{x_n}^2 f \end{cases}$$

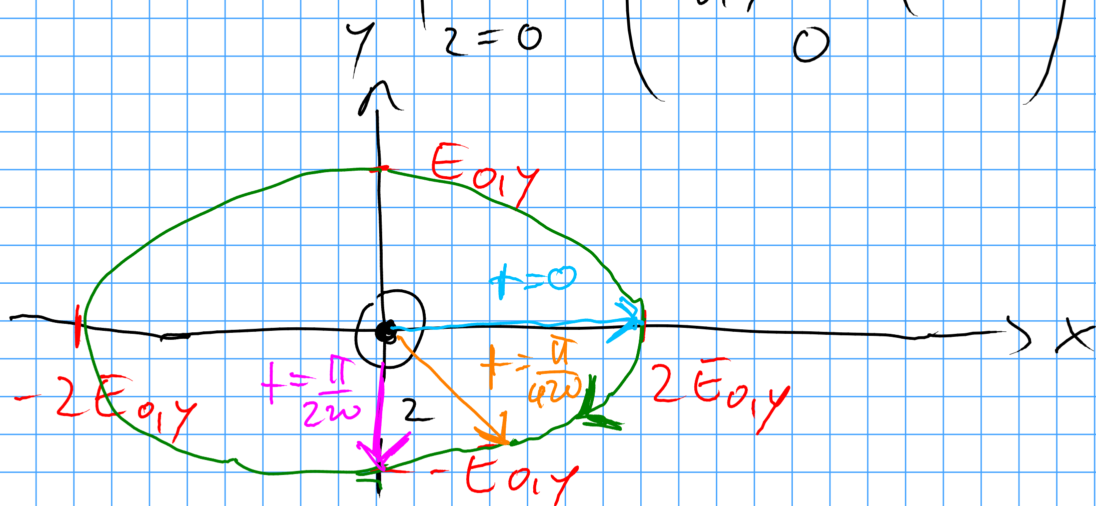
Vektorfelder
$$\begin{cases} v: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ \Delta v = \mathrm{grad}(\mathrm{div}(v)) - \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, v) \end{cases}$$

für kartesische Koordinaten:

$$\Delta v = \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \vdots \\ \Delta v_n \end{pmatrix}$$ v_1, v_2 : Skalarfelder

e) $$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} E_{0,x} \cos(k_z \cdot z - \omega t) \\ E_{0,y} \sin(k_z \cdot z - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} =$$ $\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos(\cdot) \\ \sin(\cdot) \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= \Big|_{z=0} \begin{pmatrix} E_{0,x} \cos(\omega t) \\ -E_{0,y} \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2E_{0,y} \cos(\omega t) \\ -E_{0,y} \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$



$t = \frac{\pi}{2\omega}$

$t = \frac{\pi}{4\omega}$

$$\vec{B}(r,t) = \begin{pmatrix} -B_{0,x} \sin(k_z \cdot z - \omega t) \\ B_{0,y} \cos(k_z \cdot z - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

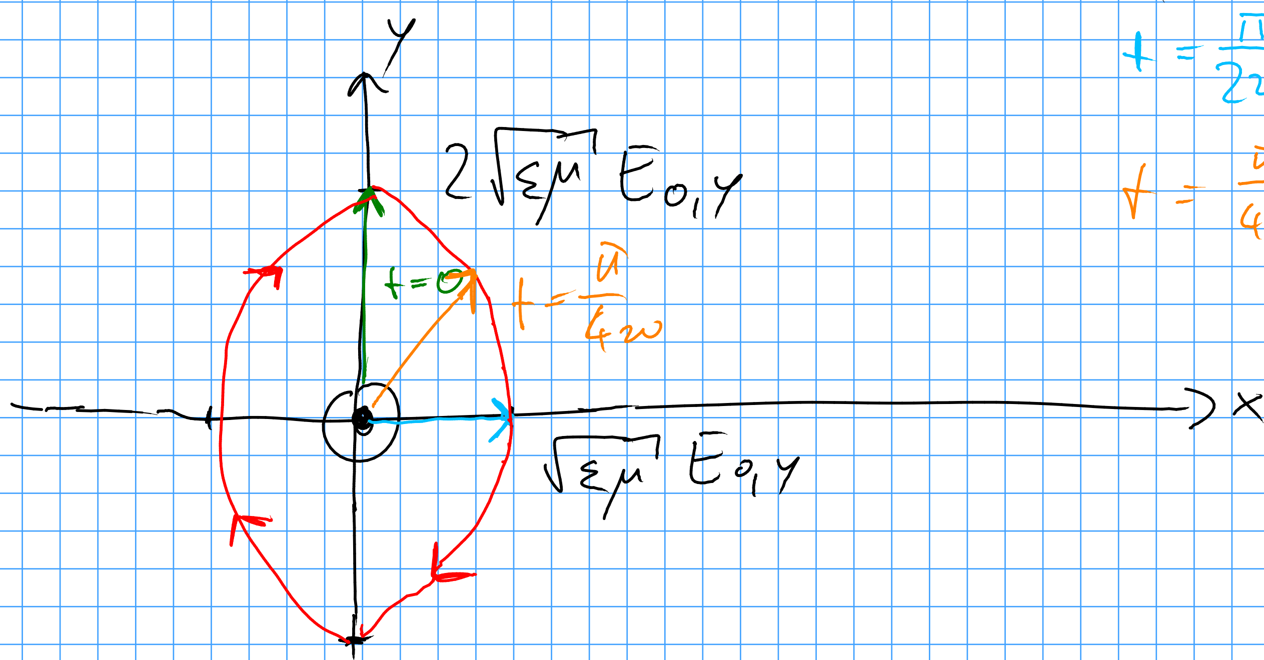
Aufgabe gilt für: $E_{0,x} = 2 E_{0,y}$

$$= \Big|_{z=0} \begin{pmatrix} B_{0,x} \sin(\omega t) \\ B_{0,y} \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon\mu}\, E_{0,y} \sin(\omega t) \\ \sqrt{\varepsilon\mu}\, E_{0,x} \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon\mu}\, E_{0,y} \sin(\omega t) \\ 2\sqrt{\varepsilon\mu}\, E_{0,y} \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$t = \frac{\pi}{2\omega}$

$t = \frac{\pi}{4\omega}$



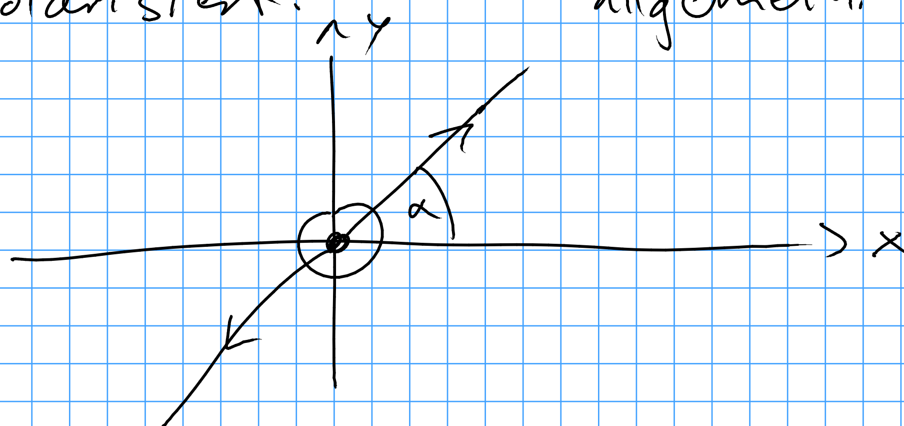
f) zirkular-polarisiert: $E_{0,x} = E_{0,y}$

hier ist die Welle: <u>linkselliptisch</u>

Begründung: Laut Zeichnung bewegt sich der resultierende E-Feld Zeiger im Uhrzeigersinn

($\hat{=}$ mathematisch negativ, rechtsdrehend). Da wir aber in Ausbreitungsrichtung blicken müssen (→ aus der Zeichenebene) findet eine "Drehung" statt: also linkselliptisch.

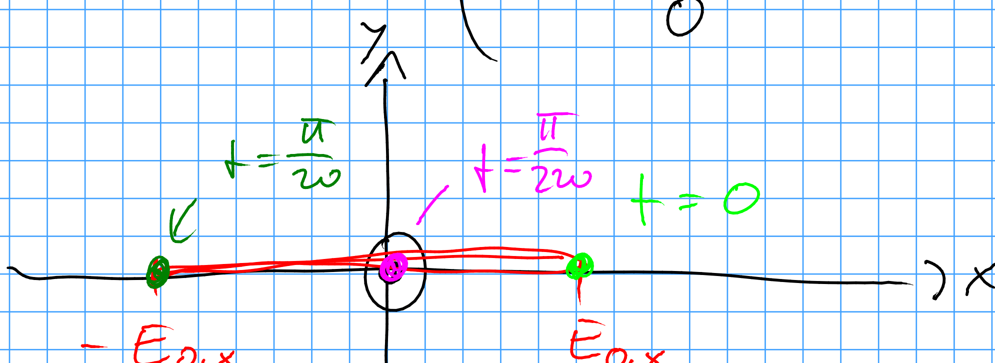
Linear polarisiert: allgemein:



in unserem Beispiel: – Phase kann nicht verändert werden

– aber $E_{0,x}$, $E_{0,y}$ veränderbar

$E_{0,y} = 0$: $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0,x} \cos(k_z z - \omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



g) (I) $E_{0,x} = E_1 + E_2$

(II) $E_{0,y} = E_1 - E_2$

$\Big\}$ Bedingung an die Superposition

$$E_1 = E_{0,x} - E_2$$

$$E_{0,y} = E_{0,x} - 2E_2$$

$$\Rightarrow \quad E_2 = \frac{1}{2}\left(E_{0,x} - E_{0,y}\right)$$

$$E_1 = E_{0,x} - \frac{1}{2}\left(E_{0,x} - E_{0,y}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(E_{0,x} + E_{0,y}\right)$$