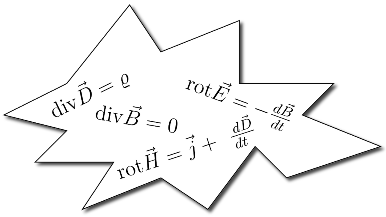
TUM EM-Tutorübung SS 10	Blatt: **1** 10.05.2010
	*Thema: Mathematische Grundlagen der EMF*
Fabian Steiner, Paskal Kiefer	

1 Funktionen im $\mathbb{R}^n$

1.1 Vektorartige Funktion

Eine vektorartige Funktion liegt vor, falls

$$\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \text{ mit } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

Bei folgenden Funktionen handelt es sich um spezielle vektorartige Funktionen, die aufgrund ihrer besonderen Bedeutung einen eigenen Namen bekommen haben:

→ **Skalarfeld**

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

→ **Vektorfeld**

$$\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

→ **Kurve** (Spezialfall eines Vektorfeldes)

$$\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

1.2 Differenzierbarkeit

Bei Funktionen im Mehrdimensionalen kann grundsätzlich nach mehreren Variablen abgeleitet werden. Dies führt zur Begriffsbildung der partiellen Ableitung:

$$\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \partial_j f_1(\mathbf{x}) \\ \partial_j f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \partial_j f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Hiervon ausgehend lassen sich wiederum einige Differentialoperator definieren, die in der Vektoranalysis eine große Bedeutung haben:

→ **Gradient**: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\nabla f = \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \partial_1 f(\mathbf{x}) \\ \partial_2 f(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \partial_n f(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Der Vektor ∇f zeigt in Richtung des größten Anstiegs von f.

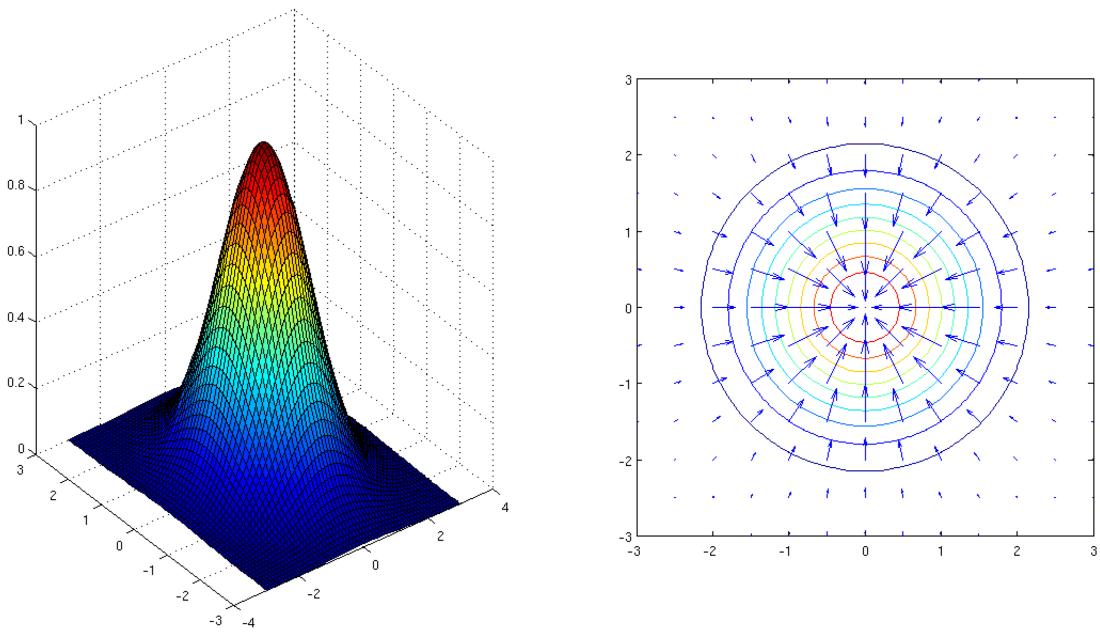


Abbildung 1: Linke Abbildung zeigt den Plot des Skalarfeldes $f(x, y) = e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$. Die rechte Abbildung veranschaulicht den Gradient als auch entsprechende Niveaulinien („Höhenlinien").

→ **Divergenz**: $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f} = \partial_1 f_1(\mathbf{x}) + \partial_2 f_2(\mathbf{x}) + \ldots + \partial_3 f_3(\mathbf{x})$$

Die Divergenz ist ein Maß für die Quellendichte eines Vektorfeldes. Befindet sich im betrachteten Volumen eine Quelle, so ist $\operatorname{div} f \neq 0$ ansonsten $\operatorname{div} f \equiv 0$.

→ **Rotation**: $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{rot} f = \nabla \times \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ f_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Die Rotation ist nur im $\mathbb{R}^3$ definiert, da auch das zugrundeliegende Kreuzprodukt lediglich im $\mathbb{R}^3$ definiert ist. Sie ist ein Maß für die Wirbelhaltigkeit eines Vektorfelds.

→ **Laplace** : $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n : \mathbb{R}$

$$\Delta f = \nabla^2 f = \partial_1^2 f(\mathbf{x}) + \partial_2^2 f(\mathbf{x}) + \ldots + \partial_n^2 f(\mathbf{x})$$

Darüber hinaus spielt ferner auch die Jacobi-Matrix, die Matrix der partiellen Ableitungen, eine entscheidende Rolle:

$$\mathbf{J}_{f(\mathbf{x})} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(\mathbf{x}) & \partial_2 f_1(\mathbf{x}) & \dots & \partial_n f_1(\mathbf{x}) \\ \partial_1 f_2(\mathbf{x}) & \partial_2 f_2(\mathbf{x}) & \dots & \partial_n f_2(\mathbf{x}) \\ & & \vdots & \\ \partial_1 f_n(\mathbf{x}) & \partial_2 f_n(\mathbf{x}) & \dots & \partial_n f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

1.3 Gradientenfelder

Sei $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein gegebenes Vektorfeld. Ein Skalarfeld $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von $\mathbf{f}$, falls

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla F$$

$-F$ bezeichnet man ferner auch als das Potential von $\mathbf{f}$. Derartige Gradientenfelder besitzen die wichtige Eigenschaft, dass die Jacobi-Matrix symmetrisch ist, $\mathbf{J}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} = \mathbf{J}^T_{\mathbf{f}(\mathbf{x})}$. Im $\mathbb{R}^3$ ist dieser Umstand mit der Bedingung äquivalent, dass $\operatorname{rot} \mathbf{f} \equiv 0$ gelten muss.

2 Einführung in die mehrdimensionale Integralrechnung

2.1 Kurvenintegrale

Der Unterschied zur eindimensionalen Integration besteht bei Kurvenintegralen darin, dass der Integrationsweg durch eine Kurve $\mathbf{w}(t)$ festgelegt wird und darüber hinaus der Integrand ein Skalarfeld f (Kurvenintegral 1. Art) oder ein Vektorfeld $\mathbf{v}(t)$ (Kurvenintegral 2. Art) sein kann.

→ **Kurvenintegral, 1. Art**

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \mathbf{w} : [a, b] \to \mathbb{R}^n, \qquad \int_{\mathbf{w}} f \mathrm{d}s := \int_a^b f(\mathbf{w}(t)) \, \|\dot{\mathbf{w}}(t)\| \, \mathrm{d}t$$

Eine typische Anwendung des Kurvenintegrals 1. Art ist beispielsweise die Berechnung der Masse eines infinitesimalen kleinen Werkstücks der Form $\mathbf{w}(t)$, dessen Massebelegung durch die Funktion f gegeben ist.

→ **Kurvenintegral, 2. Art**

$$\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \mathbf{w} : [a, b] \to \mathbb{R}^n, \qquad \int_{\mathbf{w}} \mathbf{v}^T \mathrm{d}x := \int_a^b \mathbf{v}(\mathbf{w}(t))^T \dot{\mathbf{w}}(t) \mathrm{d}t$$

Eine typische Anwendung des Kurvenintegrals 2. Art besteht darin, die Arbeit entlang einer Kurve im $\mathbb{R}^n$ zu berechnen, wenn das zugehörige Kraftfeld $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ bekannt ist.

2.2 Beispiele, Kochrezept (speziell: Kurvenintegral 2. Art)

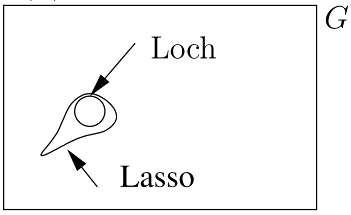
Geg. sei das Kraftfeld $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \mathbf{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x+y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$. Gesucht sei nun die Arbeit, die entlang von $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ nach $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. längs der Verbindungsgeraden
2. längs der Parabel $y = x^2 + 1$

verrichtet wird.

1. **Parametrisierung des Kurvenstrücks**
   Für beide Fälle muss nun zunächst jeweils die entsprechende Kurve parametrisiert werden. Im Falle von 1. ist dies
   $$\mathbf{w}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1-0 \\ 2-1 \end{pmatrix}, t \in [0,1].$$
   Auch Fall 2 lässt sich aufgrund der explizit gegebenen Funktion einfach berechnen:
   $$\mathbf{w}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2+1 \end{pmatrix}, t \in [0,1]$$
   Ob richtig parametrisiert wurde, kann durch Einsetzen der Intervallgrenzen überprüft werden.
2. **Berechnung der Kurventangente**
   Nun muss die Kurve noch komponentenweise abgeleitet werden:
   $$\dot{\mathbf{w}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   $$\dot{\mathbf{w}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$
3. **Berechnung des skalaren Integrals**
   Schließlich können die Kurvenintegrale in gewöhnliche Integrale übergeführt werden:
   $$\begin{aligned} \int_{\mathbf{w}_1} \mathbf{v}(\mathbf{x})^T \mathrm{d}\mathbf{x} &:= \int_0^1 \mathbf{v}(\mathbf{w}_1(t))^T \dot{\mathbf{w}}(t) \mathrm{d}\mathbf{x} = \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2+3t+1 \\ 2t^2+2t \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \\ &= 4{,}5 \\ \int_{\mathbf{w}_2} \mathbf{v}(\mathbf{x})^T \mathrm{d}\mathbf{x} &:= \int_0^1 \mathbf{v}(\mathbf{w}_2(t))^T \dot{\mathbf{w}}(t) \mathrm{d}\mathbf{x} = \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^4+2t^2+t+1 \\ 2t^3+2t \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \\ &= 4{,}5 \end{aligned}$$

Wie man sieht, ergibt sich bei beiden Integralen trotz der unterschiedlichen Parametrisierung der gleiche Integralwert. Diese besondere Eigenschaft, die sog. Wegunabhängigkeit, tritt auf, wenn das zugrundeliegende Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ ein *Gradientenfeld* ist, also $\mathbf{J}_{\mathbf{v}(\mathbf{x})} = \mathbf{J}_{\mathbf{v}(\mathbf{x})}^T$.
Diese Bedingung ist im Allgemeinen nur ein *notwendiges Kriterium*; ist das betrachtete Definitionsgebiet $D \subseteq \mathbb{R}^n$ jedoch *einfach zusammenhängend*, so ist $\mathbf{J}_{\mathbf{v}(\mathbf{x})} = \mathbf{J}_{\mathbf{v}(\mathbf{x})}^T$ auch hinreichend. $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ wird dann auch als *konservatives* Kraftfeld bezeichnet.



Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ist im Übrigen einfach zusammenhängend, falls jede in G verlaufende Kurve sich stetig in G auf einen Punkt zusammenziehen lässt. Entsprechend ist das nebenstehende Gebiet nicht einfach zusammenhängend hängend.

Bsp.	**einfach zusammenhängend**	**nicht einfach zusammenhängend**
$\mathbb{R}^2$	Gebiet ohne Loch	Gebiet mit Loch
$\mathbb{R}^3$	Gebiet mit Loch	Gebiet mit zylindrischen Loch, Torus, Gebiet mit Henkel

2.3 Krummlinige, orthonormale Koordinatensysteme

Ein krummliniges Koordinatensystem zeichnet sich von den anderen – bisher bekannten – dadurch aus, dass die Einheitsvektoren für jeden Punkt im $\mathbb{R}^n$ anders aussehen und nicht mehr konstant sind. Aus diesem Grunde spricht man im Falle des $\mathbb{R}^3$ auch von einem ortsabhängigen Dreibein.

2.3.1 Zylinderkoordinaten

$$\mathbf{x}(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

Die Einheitsvektoren ergeben sich als Ableitungen nach den jeweiligen Variablen mit anschließender Normierung:

$$\mathbf{e}_r = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}}{\left\|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}\right\|} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi}}{\left\|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi}\right\|} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{e}_z = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi}}{\left\|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}\right\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.3.2 Kugelkoordinaten

$$\mathbf{x}(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

Auch hier erhält man die Einheitsvektoren wie vorher beschrieben:

$$\mathbf{e}_r = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}}{\left\|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}\right\|} = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \mathbf{e}_\vartheta = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \vartheta}}{\left\|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \vartheta}\right\|} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi}}{\left\|\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi}\right\|} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sehr hilfreich sind in diesem Falle die Seiten S. 247ff. in der Springer-Formelsammlung (die auch zur Prüfung zugelassen ist!).