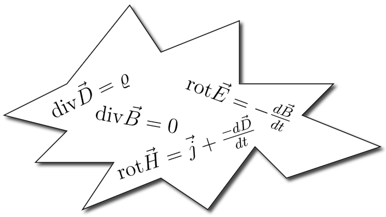


Formelsammlung EM SS 2011

Fabian Steiner, Paskal Kiefer

1 Elektrostatik

→ **Eigenschaften der Elektrostatik:**

- elektrisches Feld ist ein Potentialfeld, also $\vec{E} = -\nabla\Phi$
- $\vec{E}$ ist konservativ, d.h. $\oint_C \vec{E} = 0, \mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$

→ **Coulombsches Gesetz:**

$$\vec{F}_{1\leftarrow 2} = \vec{F}_{2\leftarrow 1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$
$$\vec{F}_{ges} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r_i}|^3}(\vec{r} - \vec{r_i})$$

→ **elektrische Feldstärke:**

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_q(\vec{r})}{q}$$
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r_i}|^3}(\vec{r} - \vec{r_i})$$

→ **Potential einer diskreten Ladungsverteilung:**

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r_i}|}$$

→ **Elektrische Arbeit:**

$$W_{el} = \int_C \vec{F}_{el}(\vec{r})d\vec{r}$$
$$W_{el} = U_{12} \cdot q$$

→ **Spannung:**

$$U_{12} = \int_{C(P_1,P_2)} \vec{E}(\vec{r})d\vec{r}$$
$$U_{12} = \Phi_1 - \Phi_2 (\text{Potentialdifferenz}$$

→ **Integralsatz von Gauß:**

$$\int_{\partial V} \vec{U} d\vec{a} = \int_V \mathrm{div}\,\vec{U} dV$$

→ **Gaußsches Gesetz (integrale Form):**

$$Q(V) = \int_{\partial V} \vec{D} d\vec{a}$$
$$Q(V) = \int_{V} \varrho(\vec{r}) dV$$

→ **Gaußsches Gesetz (differentielle Form):**

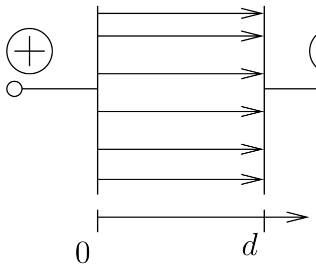
$$\operatorname{div} \vec{D} = \varrho$$

→ **Poisson-Gleichung:** aus $\vec{E} = -\nabla\Phi$ und dem Gaußschen Gesetz in differenzieller Form ergibt sich

$$\Delta\Phi = -\frac{\varrho}{\varepsilon}$$

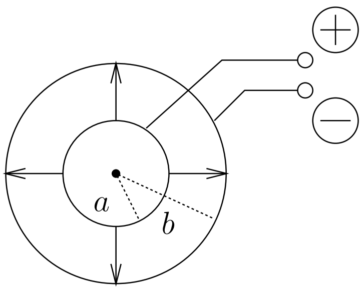
→ **Kapazität** (stets Funktion der Kondensatorgeometrie):

- Plattenkondensator



$$U_{12} = \int \vec{E} d\vec{r} = E \cdot d$$
$$Q = \int_{\partial V} \vec{D} d\vec{a} = D \cdot A = \varepsilon \cdot E \cdot A$$
$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon \cdot \frac{A}{d}$$

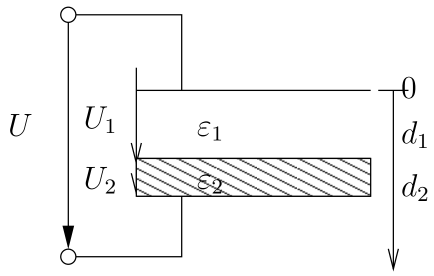
- Kugelkondensator



$$Q = \int_{\partial V} \vec{D} d\vec{a} = \int_{\partial V} \varepsilon \vec{E} d\vec{a} = 4\pi\varepsilon E r^2$$
$$U_{12} = \int \vec{E} d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \int_a^b \frac{1}{r^2} dr = 4\pi\varepsilon \frac{ab}{b-a}$$

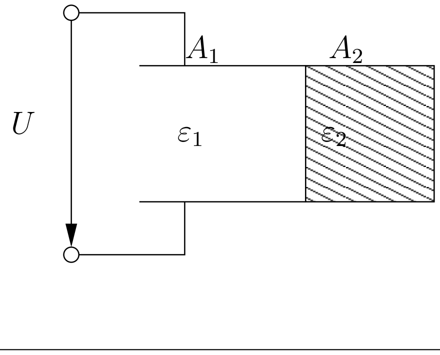
→ **Kondensatoraggregate:**

- Serienschaltung



$$|\vec{D}_1| = \sigma_{top} = \frac{Q}{A}$$
$$|\vec{D}_2| = \sigma_{bot} = \frac{Q}{A}$$
$$U = U_1 + U_2 = \int_0^{d_1} \frac{\vec{D}_1}{\varepsilon} d\vec{r} + \int_{d_1}^{d_1+d_2} \frac{\vec{D}_2}{\varepsilon} d\vec{r} = \frac{Qd_1}{A\varepsilon_1} + \frac{Qd_2}{A\varepsilon_2}$$
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{1}{\frac{d_1}{A\varepsilon_1} + \frac{d_2}{A\varepsilon_2}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

- Parallelschaltung



$$U = \int \vec{E} d\vec{r} = E \cdot d$$
$$Q = \int_{\partial V} \vec{D} d\vec{a} = \varepsilon_1 E A_1 + \varepsilon_2 E A_2$$
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_1 A_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_2 A_2}{d_2} = C_1 + C_2$$

→ **Elektrische Feldenergie:**

$$
\begin{aligned}
W_{el} &= \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \\
W_{el} &= \int_V w_{el} dV, \text{wobei } w_{el} \text{die Energiedichte bezeichnet} \\
w_{el} &= \frac{1}{2}ED
\end{aligned}
$$

2 Gleichstrom, stationäre Ströme

→ **Stromstärke:**

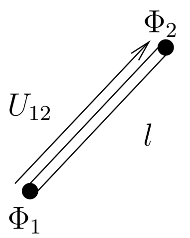
$$
I(A) = \frac{dQ(A)}{dt}
$$

→ **Stromdichte:**

$$
\begin{aligned}
|\vec{j}| &= \frac{dI_A}{dA} \\
I(A) &= \int_A \vec{j} d\vec{a} \\
\vec{j} &= qn\vec{v} = \varrho\vec{v}, \text{mehrere Ladungsträger:} \vec{j} = \sum_{i=1}^{N} q_i n_i \vec{v}_i
\end{aligned}
$$

→ **Ohmsches Gesetz:**

- homogener Leiterquerschnitt
- homogene Leitfähigkeit
- Leiter der Länge l



$$
\begin{aligned}
U_{12} &= \int_{C(P_1;P_2)} \vec{E} d\vec{r} = E \cdot l \\
I &= \int_A \vec{j} d\vec{a} = \int_A \sigma \vec{E} d\vec{a} = \sigma \frac{U_{12}}{l} A \\
\Rightarrow G &= \sigma \frac{A}{l} \\
\Rightarrow R &= \varrho \frac{l}{A} = \frac{1}{G}
\end{aligned}
$$

→ **Ladungserhaltung (integrale Form):**

- stationärer Fall

$$
\int_{\partial V} \vec{j} d\vec{a} = 0
$$

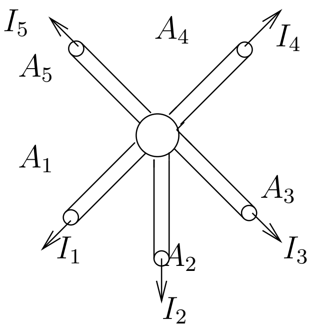
- allgemeiner Fall

$$
\int_{\partial V} \vec{j} d\vec{a} = -\frac{dQ}{dt}
$$

→ **Ladungserhaltung (differenzielle Form):**

$$
\begin{aligned}
\frac{dQ(V)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_V \varrho dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \varrho(\vec{r}) dV \\
\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} &= 0
\end{aligned}
$$

→ **Herleitung des KCL:**



$$I_K = \int_{A_K} \vec{j}$$
$$0 = \int_{\partial V} \vec{j} d\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} \int_{A_K} \vec{j} d\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} I_k$$

→ **Elektrische Leistung:**

$$P_{el} = \frac{dW_{el}}{dt} = q\vec{E}\frac{d\vec{r}}{dt} = q\vec{E}\vec{v}$$
$$p_{el} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$
$$P_{el} = \int_V p_{el} dV$$

3 Magnetostatik

→ **Lorentzkraft**

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B}), \text{mit} \dim B = \frac{V s}{m^2} = 1T$$

→ **Superpositionsprinzip (Lorentzkraft u. Coulombkraft)**

$$\vec{F}_{em} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

→ **Bewegung eines geladenen Punktes im konst. Magnetfeld**

$$r = \frac{v_\perp m}{qB}$$
$$\Omega = \frac{qB}{m} \text{Gyrationsfrequenz}$$

→ **Drehmoment auf Leiterschleife**

$$\vec{M} = I \cdot \vec{A} \times \vec{B}, \vec{m} = I \cdot \vec{A}$$
$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

→ **Ampèresches Durchflutungsgesetz**

$$\oint_{\partial A} \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 I(A), \text{mit} \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$
$$\oint_{\partial A} \vec{H} d\vec{r} = I(A) = \int_A \vec{j} d\vec{a}$$

→ **Analogien Elektrostatik ↔ Magnetostatik**

$$\text{Kraft auf} \left\{ \begin{array}{c} \text{ruhende} \\ \text{bewegte} \end{array} \right\} \text{Probeladung wird gemessen} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Coulomb-Kraft} \\ \text{Lorentz-Kraft} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \vec{E} \\ \vec{B} \end{array} \right\} \text{materialabh. Größen}$$

$$\text{Wirkung von} \left\{ \begin{array}{c} \text{Ladungsverteilung} \\ \text{Stromverteilung} \end{array} \right\} \text{über} \left\{ \begin{array}{c} \text{gaußsches Gesetz} \\ \text{Ampère'sches Gesetz} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \vec{D} \\ \vec{H} \end{array} \right\} \text{materialunabh. Größen}$$

→ **Magnetfeld eines unendlichen langen, Stromdurchflossenen Leiters**

$$\oint_{\partial A} \vec{H} d\vec{r} = I(A) \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} H_r r d\varphi = I$$
$$H_r = \frac{I}{2\pi r}$$

→ **Erweiterung des Ampèreschen Gesetzes**

$$\text{bisher: } \oint_{\partial A} \vec{H} d\vec{r} = \int_A \vec{j} d\vec{a}$$
$$\text{Maxwellsche Erweiterung: } \oint_{\partial A} \vec{H} d\vec{r} = \int_A \left(\vec{j} + \frac{\partial D}{\partial t}\right) d\vec{a}$$

→ **Ampère-Maxwellsches Gesetz in differentieller Form**

$$\text{Integralsatz von Stokes: } \int_{\partial A} \vec{U} d\vec{r} = \int_A \operatorname{rot} \vec{U} d\vec{a}$$
$$\int_{\partial A} \vec{H} d\vec{r} = \int_A \operatorname{rot} \vec{H} d\vec{a} = \int_A \left(\vec{j} + \frac{\partial D}{\partial t}\right) d\vec{a} \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

→ **Magnetischer Fluss**

$$\Phi(A) = \int_A \vec{B} d\vec{a}$$
$$\Phi(A) = BA, \text{unter der Annahme, dass } B = const., A = const.\text{gilt}$$

→ **Induktion**

- Bewegungsinduktion

$$\vec{E}_{ind} = \vec{v} \times \vec{B}$$
$$U_{ind} = \int_C \vec{E}_{ind} d\vec{r} = \int_C \left(\vec{v}(\vec{r}, t) \times \vec{B}\right) d\vec{r}$$

- Ruheinduktion

$$U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\vec{r}, t) d\vec{a}$$

→ **Maxwellsche Gleichungen**

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \varrho}$$
$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$
$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$
$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}$$